7. Taso- ja avaruusintegraali

7.1. Tasointegraalin määrittely

205.

Tarkastellaan funktiota $f(x,y) = x+y$ neliössä $\{\,(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\,\}$. Neliö jaetaan suorilla $x = a$ ja $y = b$ neljään osasuorakulmioon; $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$. Muodosta tähän jakoon p liittyvä alasumma $\underline{S}_p$ ja yläsumma $\overline{S}_p$. Määritä $\sup_p \underline{S}_p$ ja $\inf_p \overline{S}_p$ tällaisille jaoille. Seuraako lukujen erisuuruudesta, että funktio ei ole integroituva ko. neliössä?

VASTAUS:

206.

Olkoot T_1 ja T_2 kaksi perussuorakulmiota, joille pätee $A \subset T_1$, $A \subset T_2$. Osoita, että jos funktion f nollajatko f_A^0 on integroituva yli joukon T_1, niin se on integroituva myös joukon T_2 yli ja integraalit ovat yhtä suuret:

$$\int_{T_1} f_A^0 = \int_{T_2} f_A^0.$$

VASTAUS:

7.2. Tasointegraalin perusominaisuudet

207.

Todista suoraan integraalin määritelmään perustuen tasointegraalin ominaisuus

$$\int_A \lambda f = \lambda \int_A f,$$

missä λ on vakio.

VASTAUS:

208.

Todista funktioiden nollajatkoille: $(f+g)_A^0 = f_A^0 + g_A^0$.

VASTAUS:

209.

Olkoon joukko A jaettu kahteen osaan $A = A_1 \cup A_2$, missä $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Osoita: $f_A^0 = f_{A_1}^0 + f_{A_2}^0$.

VASTAUS:

210.

Osoita vastaesimerkillä, että tasointegraalin väliarvolauseen oletusta integrointijoukon A yhtenäisyydestä ei voida jättää pois.

VASTAUS:

7.3. Tasointegraalin laskeminen

211.

Funktio $f(x,y)$ olkoon jatkuva joukossa $\{\,(x,y) \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1(x) \le y \le b_2(x)\,\}$, missä funktiot $b_1(x)$ ja $b_2(x)$ ovat jatkuvia välillä $[a_1,a_2]$. Todista, että funktio

$$g(x) = \int_{b_1(x)}^{b_2(x)} f(x,y)\,dy$$

on jatkuva välillä $[a_1,a_2]$.

VASTAUS:

212.

Laske

$$\iint\limits_A f_{xy}(x,y)\,dxdy,$$

kun A on suorakulmio $[a,b]\times[c,d]$.

VASTAUS:

213.

Laske seuraavat integraalit:

$$\text{a)}\ \int_A x^2\,da, \quad A = \{\,(x,y) \mid |x|+|y| \le 1\,\};$$
$$\text{b)}\ \int_A \frac{x}{y}\,da, \quad A = \{\,(x,y) \mid |x| \le 1,\ 1 \le y \le 2\,\}.$$

VASTAUS: a) $\frac{1}{3}$; b) 0.

214.

Laske $\int_A xy\,da$, kun A on a) kolmio, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$; b) kuvio, jonka määrittelevät ehdot $x \in [0,1]$, $0 \le y \le \sqrt{x}$; c) segmentti, jota rajoittavat suora $y = 2(x-p)$ ja paraabeli $y^2 = 2px$.

VASTAUS:

215.

Etsi funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (10 - xu - yv^2)^2\,dudv,$$

suhteelliset ääriarvot. Ovatko nämä maksimeja vai minimejä?

VASTAUS:

216.

Laske integraali

$$\int_A \frac{y}{1+\sqrt{2}x}\,dxdy, \quad A = \{\,(x,y) \mid 0 \le x \le y \le \sqrt{1-x^2}\,\}.$$

VASTAUS: $\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

7.4. Avaruusintegraali

217.

Olkoon $V = \{ (x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1 \}$. Laske a) $\int_V (1-x-y)^5\, dv$, b) $\int_V xyz^4\, dv$.

VASTAUS: a) $1/56$; b) $1/15120$.

218.

Tutki, millä muuttujan t arvoilla funktio

$$f(t) = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{2} \int_{z=2}^{t} xy(z-1)\ln(1+z^4)\, dxdydz$$

saa pienimmän arvonsa.

VASTAUS:

7.5. Muuntaminen sijoituksella

219.

Laske integraali

$$\iint\limits_A (x+2y)^4(x-2y)^6\, dxdy,$$

kun integroimisjoukkona on tasoalue $A = \{ (x,y) \mid |x+2y| \leq 1,\ |x-2y| \leq 2 \}$.

VASTAUS: $128/35$.

220.

Laske sopivan muuttujanvaihdon avulla integraali

$$\iint\limits_A (2x+3y)^2(x-5y)^2\, dxdy, \quad \text{missä } A = \{ (x,y) \mid |2x+3y| \leq 4,\ |x-5y| \leq 3 \}.$$

VASTAUS: $768/13$.

221.

Laske käyrien $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$, $x^4 = cy^3$, $x^4 = dy^3$ $(0 < a < b,\ 0 < c < d)$ ensimmäisessä neljänneksessä rajoittaman alueen pinta-ala. Valitse uusiksi muuttujiksi u ja v, jotka määräytyvät yhtälöistä $y^3 = ux^2$, $x^4 = vy^3$.

VASTAUS:

222.

Laske muotoa $x = as\cos t$, $y = bs\sin t$ (a ja b vakioita) olevaa muunnosta käyttäen tasointegraali

$$\int_A \ln\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right) da, \quad A = \{ (x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 9x^2 + 4y^2 \leq 36 \}.$$

VASTAUS:

223.

Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat xy-tason yläpuolella pinnat

$$\begin{aligned}&\text{a) } x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=az,\ z=0 \quad (a>0);\\ &\text{b) } z=x^2-y^2,\ x^2+y^2=1,\ z=0.\end{aligned}$$

VASTAUS:

224.

Laske sen kappaleen tilavuus, jota rajoittavat paraboliset lieriöt $z^2=y$, $z^2=2y$, $x^2=z$, $x^2=2z$, $y^2=x$, $y^2=2x$. Siirry aluksi yhtälöiden $x=uy^2$, $y=vz^2$, $z=wx^2$ määräämiin uusiin muuttujiin u,v,w.

VASTAUS:

225.

Laske $\int_V x^2y\,dv$, kun $V=\{\,(x,y,z)\mid z^2\le x^2+y^2\le 1\,\}$.

VASTAUS:

226.

Laske $\int_V xyz\,dv$, kun V on pallon oktantti

$$\{\,(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\,\}.$$

VASTAUS:

227.

Muunna integraali

$$\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz$$

pallokoordinaatteihin, kun funktio f oletetaan integroituvaksi ja integroimisjoukko A on R-säteinen origokeskinen pallo. Laske sovellutuksena R-säteisen pallon tilavuus.

VASTAUS:

228.

Laske sekä pallon $x^2+y^2+z^2=R^2$ että kartion $\sqrt{3}z=\sqrt{x^2+y^2}$ sisään jäävän avaruuden osan tilavuus avaruusintegraalina siirtymällä a) lieriö-, b) pallokoordinaatistoon.

VASTAUS:

229.

Pisteen $P_0 \;\widehat{=}\; \mathbf{r}_0$ keskietäisyys kappaleen B pisteistä on integraali

$$\frac{1}{v(B)}\int_B |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\,dv.$$

Laske pisteen $(0,0,c)$ keskietäisyys pallon $r\le R$ pisteistä, kun $c>R$.

VASTAUS:

230.

Laske pallokoordinaateissa integraali

$$f(t) = \int_B \frac{dv}{\sqrt{r^2 - 2tr\cos\vartheta + t^2}}, \quad t > 0,$$

missä B on origokeskinen R-säteinen pallo. Piirrä funktion f kuvaaja.

VASTAUS:

231.

Laske tasa-arvokäyrien avulla integraali

$$\int_A \sin(x^2 + y^2)\, dxdy, \quad A = \{\, (x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \,\}.$$

VASTAUS:

232.

Anna differentiaaligeometrinen perustelu a) lieriökoordinaatiston tilavuusalkiolle $dv = \rho\, d\rho d\varphi dz$, b) pallokoordinaatiston tilavuusalkiolle $dv = r^2 \sin\vartheta\, dr d\varphi d\vartheta$.

VASTAUS:

7.6. Integraali avaruudessa $\mathbb{R}^n$

233.

Olkoon $B_n(r)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ r-säteinen pallo:

$$B_n(r) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le r \,\}.$$

Olkoon $\mu(B_n(r))$ tämän mitta (pituus, pinta-ala, tilavuus, etc.). Johda yksikköpallojen $B_n(1) = B_n$ mitoille seuraava rekursio:

$$\mu(B_1) = 2, \quad \mu(B_2) = \pi, \quad \mu(B_n) = \frac{2\pi}{n}\mu(B_{n-2}),\ n = 3, 4, \ldots.$$

VASTAUS:

234.

Tutki, minkä ulotteisen avaruuden yksikköpallo on mitaltaan suurin. Millainen tilanne on r-säteisen pallon tapauksessa?

VASTAUS: 5-ulotteisen; riippuu säteestä r.