10. Viivaintegraali

10.1. Määrittely ja laskeminen

293.

Laske viivaintegraali

$$\int_c (y-x)\,dx + xy\,dy,$$

kun c on a) pisteitä $A \mathrel{\widehat{=}} (1,0)$, $B \mathrel{\widehat{=}} (-1,0)$ yhdistävä x-akselin yläpuolinen yksikköympyrän kaari, b) murtoviiva $APQB$, missä $P \mathrel{\widehat{=}} (1,1)$, $Q \mathrel{\widehat{=}} (-1,1)$.

VASTAUS:

294.

Laske viivaintegraali

$$\oint_c (y-x)\,dx + xy\,dy,$$

kun c on positiiviseen suuntaan kierrettynä a) ympyrä $x^2+y^2=1$, b) sen neliön piiri, jonka kärjet ovat $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ja $(0,1)$, c) käyrä, jonka muodostavat pisteitä $(0,0)$ ja $(\pi,0)$ yhdistävät jana ja kaari $y=\sin x$.

VASTAUS: a) $-\pi$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-2+\frac{\pi}{4}$.

295.

Laske viivaintegraali

$$\int_c 9x^2y\,dx - 11xy^2\,dy,$$

kun c on origon pisteeseen $(1,1)$ yhdistävä a) kaari $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}$, b) jana, c) kaari $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^r\mathbf{j}$, missä vakio r on >0.

VASTAUS: a) -1; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\frac{11r^2+6r-9}{(r+3)(3r+1)}$.

296.

Laske viivaintegraali

$$\oint_c (\sin y + x^4y)dx + (xy^4 + x\cos y + x)dy,$$

missä c on tason yksikköympyrä positiiviseen suuntaan kierrettynä.

VASTAUS: π.

297.

Laske tason viivaintegraali

$$\int_c \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

kun c on logaritminen spiraali $r=e^{-\varphi}$, $\varphi\in[0,\alpha]$. Onko integraalilla raja-arvoa, kun $\alpha\to\infty$?

VASTAUS: $e^{-\alpha}-1$, raja-arvo $=-1$.

298.

Laske viivaintegraali

$$\int_c yz^2\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz,$$

kun c on pisteen $(0,0,0)$ pisteeseen $(1,2,3)$ yhdistävä a) jana, b) kaari $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t^4\,\mathbf{j} + 3t^5\,\mathbf{k}$.

VASTAUS: a) 18; b) 18.

299.

Laske viivaintegraali $\int_c yz^2\,dx + zx^2\,dy + xy^2\,dz$, kun c on origon pisteeseen $(1,2,3)$ yhdistävä a) jana, b) kaari $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + 2t^4\,\mathbf{j} + 3t^5\,\mathbf{k}$.

VASTAUS:

300.

Laske $\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}$, kun $\mathbf{u}(x,y,z) = \sqrt{y}\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$ ja c on käyrän $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ pisteestä $(0,0,0)$ pisteeseen $(3,9,27)$ suuntautuva kaari.

VASTAUS: $4779/10$.

301.

Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = x^3\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Laske

$$\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r},$$

missä c on origosta pisteeseen $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ pitkin tason $y = z$ ja pyörähdysparaboloidin $z = x^2 + y^2$ leikkauskäyrää suuntautuva tie.

VASTAUS: $35/192$.

302.

Olkoon $\mathbf{u}(x,y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ ja olkoon c tason yksikköympyrä. Laske $\oint_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{n}$. (Tässä on $d\mathbf{n} = \mathbf{n}\,ds$, missä $\mathbf{n}$ on käyrän c yksikköulkonormaali.)

VASTAUS: 0.

303.

Laske $\oint_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{n}$, kun $\mathbf{u}(x,y) = (x + e^y)\,\mathbf{i} + (\sin x + 2y)\,\mathbf{j}$ ja c on ellipsi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. ($d\mathbf{n} = \mathbf{n}\,ds$, missä $\mathbf{n}$ on käyrän c yksikköulkonormaali.)

VASTAUS:

304.

Olkoon $\mathbf{u}(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}$. Laske

$$\int_c \mathbf{u}\times d\mathbf{r},$$

missä c on origosta pisteeseen $(2,2,4)$ pitkin tason $x = y$ ja parabolisen lieriön $z = x^2$ leikkauskäyrää suuntautuva tie.

VASTAUS: $-\frac{8}{3}\mathbf{i} - \frac{56}{3}\mathbf{j} + \frac{32}{5}\mathbf{k}$.

305.

Olkoon

$$g(u,v) = \int_c y\,dx + 2x\,dy,$$

missä c on jana, jonka alkupiste on $(0,0)$ ja loppupiste (u,v). Määritä funktion g suurin arvo ympyrällä $u^2 + v^2 = 1$.

VASTAUS: $3/4$.

306.

Olkoon $M = \sup_{\mathbf{r}\in c} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|$ ja L kaaren c pituus. Osoita, että

$$\left|\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}\right| \leq ML.$$

VASTAUS:

307.

Olkoot c_1 ja c_2 suunnistettuja kaaria, joilla on yhteinen alkupiste ja yhteinen loppupiste. Olkoon $c = c_1 \cup (-c_2)$. Todista:

$$\int_c \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = 0 \iff \int_{c_1} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r} = \int_{c_2} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{r}.$$

VASTAUS:

10.2. Sovellutuksia

308.

Homogeeninen rautalanka taivutetaan puoliympyrän kaaren muotoiseksi. Laske keskiö.

VASTAUS: Etäisyydellä $2R/\pi$ puoliympyrän kaaren keskipisteestä symmetria-akselilla, missä R on ympyränkaaren säde.

309.

Laske keskiö a) asteroidin ensimmäisessä neljänneksessä sijaitsevalle kaarelle $\mathbf{r}(t) = a\cos^3 t\,\mathbf{i} + a\sin^3 t\,\mathbf{j}$, $t \in [0,\pi/2]$, b) sykloidin kaarelle $\mathbf{r}(t) = a(t-\sin t)\mathbf{i} + a(1-\cos t)\mathbf{j}$, $t \in [0,2\pi]$.

VASTAUS: a) $(2a/5, 2a/5)$; b) $(\pi a, 4a/3)$.

310.

Tason paraabelin kaarelle $x^2 = 2y$, $x \in [0,1]$, on levitetty massa, jonka tiheys (massa pituusyksikköä kohden) on $\rho(x,y) = x/\sqrt{1+2y}$. Laske kaaren massakeskipiste. Sijaitseeko tämä kaarella?

VASTAUS: $(2/3, 1/4)$.

311.

Kirjoita kaavat napakoordinaatistossa annetun sileän kaaren $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha,\beta]$, keskiön x- ja y-koordinaateille.

VASTAUS: $x_0 = \int_\alpha^\beta r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi\,/s$, $y_0 = \int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi\,/s$,
missä $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\,d\varphi$.

312.

Todista Guldinin toinen sääntö: Jos tasokäyrän kaari pyörähtää samassa tasossa olevan akselin ympäri, joka ei leikkaa kaarta, niin syntyvän pyörähdyspinnan ala on kaaren pituus kerrottuna kaaren keskiön kulkemalla matkalla.

VASTAUS:

313.

Ympyrä, jonka säde on R, pyörähtää samassa tasossa olevan akselin ympäri, jonka etäisyys ympyrän keskipisteestä on L. Olkoon $L > R$. Laske Guldinin säännön avulla syntyvän kappaleen (toruksen) pinta-ala.

VASTAUS: $4\pi^2 RL$.

10.3. Riippumattomuus tiestä

314.

Laske viivaintegraali $\int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$, kun integroimistien alkupisteenä on origo ja loppupisteenä $P_0 \,\widehat{=}\, \mathbf{r}_0$. Totea, että integraali ei riipu integroimistiestä. Mikä on vektorikentän $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ potentiaali?

VASTAUS: $\frac{1}{2}|\mathbf{r}_0|^2$; potentiaali $\frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2$.

315.

Osoita, että viivaintegraali

$$\int_{(-1,1,-1)}^{(1,2,3)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$$

on alku- ja loppupistettä yhdistävästä tiestä riippumaton ja laske integraali. Voidaanko integraali kirjoittaa muotoon $\int \nabla g \cdot d\mathbf{r}$, kun funktio g valitaan sopivasti?

VASTAUS: Integraali $= 5$; $g(x,y,z) = xyz$.