Lyhyt matematiikka 16.3.2001, ratkaisut:

1. Jos risteysalueen halkaisija 1 : 200 000 mittakaavaisella kartalla on 0,18 cm, olisi tämä halkaisija todellisuudessa $200\,000 \cdot 0{,}18$ cm $= 36\,000$ cm $= 360$ m. Jos risteysalueen halkaisija on todellisuudessa 25 m, olisi sitä kartalla kuvattava alueella, jonka halkaisija on $25/200\,000$ m $= 0{,}125$ mm.

2. Yhtälö sievenee muotoon $10x^2 + 3x - 1 = 0$. Sen ratkaisut ovat $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{1}{5}$.

3. Jos tennispallon säde on r, on neljän pallon yhteinen tilavuus $4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ eli $\frac{16}{3}\pi r^3$. Lieriön säde on myös r ja korkeus $8r$. Lieriön tilavuus on $\pi r^2 \cdot 8r$ eli $8\pi r^3$. Pallojen tilavuuden suhde kotelon tilavuuteen on $\dfrac{16}{3} \cdot \dfrac{\pi r^3}{8\pi r^3} = \dfrac{2}{3}$. Vastaus: $\dfrac{2}{3}$.

4. a) Kuusen ympärysmitta on kasvanut vuodesta 1997 millimetereissä $13{,}16+6{,}85+7{,}06 = 27{,}07$. Jos $2r_7$ on kuusen halkaisija vuonna 1997 ja $2r_0$ halkaisija vuonna 2000, on senttimetreissä $2\pi r_0 = 2\pi r_7 + 2{,}707$. Tästä saadaan halkaisijan kasvuksi $2r_0 - 2r_7 = 2{,}707/\pi \approx 0{,}8617$ cm. **b)** Kuusen säde vuonna 1997 on $r_7 = 102{,}20/(2\pi) \approx 16{,}266$ cm ja vuonna 2000 $r_0 = r_7 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8617 \approx 16{,}696$ cm. Kuusen vuosien 2000 ja 1997 poikkileikkausten alojen suhde on $(r_0/r_7)^2 \approx 1{,}0537$. Alan kasvu on siis 5,37 %. Vastaus: a) 8,6 mm, b) 5,4 %.

5. Jos yrityksen liikevaihto vuoden 1. neljänneksellä on miljoonissa euroissa x, on liikevaihto 2. neljänneksellä $0{,}89x$. Tästä saadaan yhtälö $x + 0{,}89x = 6{,}0$. Sen ratkaisu on $x = 6{,}0/1{,}89 \approx 3{,}1746$. Vastaus: 3,2 miljoonaa euroa.

6. a) Pisteiden $(-2, 11)$ ja $(7, -1)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{11+1}{-2-7} = -\frac{4}{3}$. Suoran yhtälö on $y - 11 = -\frac{4}{3}(x + 2))$ eli $4x + 3y = 25$. **b)** Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 25/3)$ ja x-akselin pisteessä $(25/4{,}0)$. Kolmion sivujen pituudet ovat siten $25/3$, $25/4$ ja $\sqrt{(25/3)^2 + (25/4)^2} = 125/12$ $(\approx 10{,}4)$.

7. Jana AB on kolmion ABC hypotenuusa. Sen pituus on $\sqrt{8{,}6^2 + 5{,}8^2} \approx 10{,}373$ cm. Jos janan CD pituus on x cm, on janojen DA ja DB $8{,}6 - x$ cm. Suorakulmaisesta kolmiosta DCB saadaan x:lle yhtälö $5{,}8^2 + x^2 = (8{,}6 - x)^2$ eli $17{,}2x = 8{,}6^2 - 5{,}8^2$. Sen ratkaisu on $x \approx 2{,}344$. Vastaus: AB:n pituus on 10,4 cm ja CD:n pituus 2,3 cm.

8. Nukutusainetta on alussa x mg ja lopussa $20 \cdot 23 = 460$ mg. Leikkausajan osuus puoliintumisajasta on 1,25 h/3 h $= 5/12$. Tästä saadaan x:lle yhtälö $x \cdot (1/2)^{5/12} = 460$ eli $x = 460 \cdot 2^{5/12} \approx 614{,}03$. Vastaus: Vähintään 614 mg.

9. Käytämme pituusyksikkönä metriä. **a)** Ensimmäisen kuution särmän pituus on 1, toisen $\frac{1}{2}$, kolmannen $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$, neljännen $(\frac{1}{2})^3$ ja lopulta n:n $(\frac{1}{2})^{n-1}$. **b)** Särmien pituudet muodostavat geometrisen jonon, jossa ensimmäinen termi on 1 ja suhdeluku $\frac{1}{2}$. Näin ollen n:n kuution pinon korkeus $h_n = \sum_1^n (\frac{1}{2})^{n-1} = 2(1 - (\frac{1}{2})^n)$. Erityisesti 10 kuution pinon korkeus $h_{10} = 2(1 - (\frac{1}{2})^{10}) \approx 1{,}998047$. Vastaavasti $h_{11} \approx 1{,}999023$, $h_{12} \approx 1{,}999512$, $h_{13} \approx 1{,}999756$, $h_{14} \approx 1{,}999878$. Pinon korkeus näyttää lähestyvän lukua 2. Itse asiassa h_n:n lausekkeessa termi $(\frac{1}{2})^n$ pienenee aina puoleen n:n kasvaessa yhdellä. Näin ollen n:n kasvaessa termi lähestyy nollaa eli h_n lähestyy lukua 2.

10. Sanassa on viisi vokaalia ja viisi konsonanttia. **a)** Todennäköisyys, että ensimmäinen otettu kirjain on vokaali, on $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. **b)** Todennäköisyys, että kolmesta otetusta kirjaimesta vain yksi on vokaali, jolloin kaksi on konsonantteja, on $\binom{5}{1}\binom{5}{2}/\binom{10}{3} = \frac{5 \cdot 10}{120} = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$. **c)** Kirjaimia I ja L on kaksi ja O yksi. Kolme kirjainta voi olla kuudessa järjestyksessä. Kysytty todennäköisyys on $6 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333$.

11. Kolmio BCO on tasakylkinen. Jos sen B:ssä oleva kulma ABCon α, niin myös C:ssä oleva kulma on α. Tällöin kolmion O:ssa oleva kulma on $180^\circ - 2\alpha$. Keskuskulma AOC on edellisen kulman vieruskulmana $180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$. On osoitettu, että kehäkulma ABC on puolet keskuskulmasta AOC.

12. **a)** Funktion $y = V(t)$ kuvaaja on ylöspäin aukeavan paraabelin kaari, jonka huippu on ty-koordinaatioston pisteessä (20,0) ja joka kulkee pisteen $(0, 208\,000)$ kautta. Arvo $t = 20$ on funktion $V(t)$ ainoa nollakohta, joten säiliö on tyhjä hetkellä $t = 20$. Funktio esittää siis säiliön tyhjenemistä välillä [0, 20]. **b)** Tyhjenemisnopeus $q(t) = -V'(t) = 20800 - 1040t$. Sen kuvaaja on jana pisteestä $(0, 20\,800)$ pisteeseen (20,0). Koska jana on laskevalla suoralla, on tyhjenemisnopeus suurimmillaan hetkellä $t = 0$.

13. Kaavan mukaan Legendren polynomi $P_2(x) = \frac{4-1}{2} x \cdot x - \frac{2-1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ ja $P_3(x) = \frac{6-1}{3} x \cdot (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}) - \frac{3-1}{3} \cdot x = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$. Näiden derivaatat ovat $P_2'(x) = 3x$ ja $P_3'(x) = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}$. Edelleen, $P_3'(x) - xP_2'(x) = \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 3(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}) = 3P_2(x)$.

14. Tilillä oli $1{,}02 \cdot 500\,000$ mk vuoden 2000 alussa. Toukokuun loppuun mennessä oli karkausvuotta kulunut 152 vrk. Kun pankki lisäsi tilille kertyneet korot, oli tilillä rahaa $(1 + 0{,}02 \cdot 152/366) \cdot 1{,}02 \cdot 500\,000$ mk $= 514\,236{,}07$ mk. Kun tili tyhjennettiin 25.8., oli se kasvanut korkoa 1.6. lähtien 85 vrk. Tänä aikana kertynyt korkomäärä oli $514\,236{,}07 \cdot 0{,}02 \cdot 85/366$ mk $= 2388{,}53$ mk. Tästä summasta menee 29 % lähdevero, joka on täysinä markkoina 693 mk. Nettokoroksi jää 1695,53 mk. Kun tämä lisätään 1.6. olleeseen pääomaan saadaan nostettu summa, joka on 515 931,60 mk.

15. Lasketaan kullakin kilpailijalla 100 m juoksun ja kuulantyönnön pisteet yhteen. Näin saadaan luvut $x_1, x_2, ..., x_{10}$. Olkoot luvut $y_1, y_2, ..., y_{10}$ kilpailijoiden yhteispisteet samassa järjestyksessä. Kun pisteet (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., 10$ merkitään xy-koordinaatistoon, saadaan korrelaatiodiagrammi. Regressiosuoran $y = a + bx$ kertoimien a ja b arvot saadaan luvuista x_i ja y_i, $i = 1, 2, ..., 10$ esimerkiksi taulukkokirjan kaavoilla. Nyt $a \approx 5091{,}49$ ja $b \approx 1{,}97945$. Korrelaatiokertoimelle saadaan arvo $r \approx 0{,}6193$. Hämäläisellä 100 m juoksun ja kuulantyönnön pistesumma $x_H = 1590$. Regressiosuora ennustaa hänen loppupistemääräkseen $y_H = a + bx_H \approx 8239$, jolla hän olisi sijoittunut yhdeksänneksi. (Todellisuudessa hän oli 23.)