Lyhyt matematiikka 22.3.2002, ratkaisut:

1. **a)** Jos $3x + 4 = 5 - 6x$, on $9x = 1$. Vastaus: $x = 1/9$. **b)** $x = \frac{1}{24}(7 \pm \sqrt{49 - 48}) = \frac{1}{24}(7 \pm 1)$. Vastaus: x on $1/3$ tai $1/4$.

2. Jos ympyrän säde on r cm, on $\pi r^2 = 12$ eli $r^2 = 12/\pi$. Ympäri piirretyn neliön sivu on $2r$, joten neliön ala on $4r^2 = 48/\pi \approx 15{,}2789$. Sisään piiretyn neliön lävistäjä on $2r$, joten neliön sivu on $\sqrt{2}\,r$ ja neliön ala $2r^2 = 24/\pi \approx 7{,}6394$. Vastaus: Ympäri piirretyn neliön ala on $15{,}28\ \mathrm{cm}^2$ ja sisään piirretyn $7{,}64\ \mathrm{cm}^2$.

3. **a)** Budjetista riittäisi kullekin $\dfrac{200 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^6} = 40 \cdot 10^3$ mk. **b)** 1 vuosi $= 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s $= 3{,}1536 \cdot 10^7$ s. Gigasekunti on vuosissa $\dfrac{10^9}{3{,}1536 \cdot 10^7} = \dfrac{100}{3{,}1536} \approx 31{,}7098$. Siten vuoden 1983 alkupuolella syntynyt täyttää gigasekunnin vuonna 2014, loppupuolella syntynyt vuonna 2015. Vastaus: **a)** 40 000 mk, **b)** vuonna 2014 tai 2015.

4. Jonon 888. termi on $2 \cdot 888$ ja 999. termi $2 \cdot 999$. Jonon 888 ensimmäisen termin summa on $\frac{1}{2} \cdot (2 + 2 \cdot 888) \cdot 888 = (1 + 888) \cdot 888 = 789\,432$ ja 999 ensimmäisen termin summa on $\frac{1}{2} \cdot (2 + 2 \cdot 999) \cdot 999 = (1 + 999) \cdot 999 = 999\,000$. Tämä on $209\,568$ suurempi kuin edellinen summa eli prosenteissa $100 \cdot \dfrac{209\,568}{789\,432} \approx 26{,}5467$. Vastaus: 26,5 %.

5. Muropaketin paino oli alunperin a (kg) ja hinta b (euroa) ja paketteja myytiin c kpl. Muutoksen jälkeen paino oli $1{,}1a$ (kg), hinta $1{,}12b$ (euroa) ja myynti $0{,}9c$ pakettia. Uuden myynnin suhde vanhaan oli mitattuna **a)** painosssa $1{,}1a \cdot 0{,}9c/(ac) = 0{,}99$ eli myynti väheni 1 %, **b)** rahassa $1{,}12b \cdot 0{,}9c/(bc) = 1{,}008$ eli myynti lisääntyi 0,8 %.

6. Katsoja K, maston huippu H ja maston pystysuora projektio järven pinnan tasoon P muodostavat suorakulmaisen kolmion. Jos kysytty kulma on α, saadaan kolmiosta: $\tan\alpha = \dfrac{PH}{KP} = \dfrac{120 + 32}{4500} \approx 0{,}0337778$. Näin ollen $\alpha \approx 1{,}9346^{\circ}$. Vastaus: $1{,}9^{\circ}$.

7. Merkitään lauseketta $f(x)$:llä ja sievennetään, jolloin $f(x) = (x - 1/x)^2 - (x - 2/x)^2 = x^2 - 2 + 1/x^2 - (x^2 - 4 + 4/x^2) = 2 - 3/x^2$. Kysytyt suureet ovat: $f(10) = 2 - 3/10^2 = 1{,}97$, $f(100) = 2 - 3/10^4 = 1{,}9997$, $f(1000) = 2 - 3/10^6 = 1{,}999997$, $f(10\,000) = 2 - 3/10^8 = 1{,}99999997$.

8. Suolaliuoksen massasta, 1 kg, on suolaa 0,25 kg. Jos liuokseen lisätään x kg vettä, on syntyvän liuoksen väkevyys prosentteina $p = 100 \cdot 0{,}25/(1 + x) = 25/(1 + x)$. Tämän kuvaajasta saadaan kysytty graafinen esitys. Kun $x = 0$, on liuos 25-prosenttinen ja kun $x = 11{,}5$ on liuos 2-prosenttinen. Koska $10 = 25/(1 + x) \Leftrightarrow x = 25/10 - 1 = 1{,}5$, tarvitaan 10-prosenttiseen liuokseen 1,5 kg lisää vettä.

9. Kahdella nopanheitolla syntyy $6 \cdot 6 = 36$ eri tapausta. Mahdollisuuksia saada toisella nopalla ensimmäistä suurempi silmäluku on 5, kun 1. on 1; 4, kun 1. on 2; 3, kun 1. on 3; 2, kun 1. on 4 ja 1, kun 1. on 5. Yhteensä suotuisia tapauksia on 15. Kysytty todennäköisyys on $15/36 = 5/12$. Olkoon sitten kolme nopanheittoa, joista ensimmäinen on 3. Kahden muun heitossa syntyy taas 36 eri tapausta. Näistä suotuisia on vain 3, nimittäin parit (4,5), (4,6) ja (5,6). Kysytty todennäköisyys on nyt $3/36 = 1/12$.

10. Koska veden tiheys on 1 kg/dm^3, syrjäyttää pallon puolikas 47 dm^3 vettä. Pallon tilavuus on siten $V = 94$ dm^3. Toisaalta $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Tästä voidaan ratkaista pallon säde, $r = \sqrt[3]{141/(2\pi)} \approx 2{,}82063$ dm. Jos tyhjän sisäpallon säde on s ja raudan tiheys 7,7 kg/dm^3, saadaan pallon rautamäärän massasta yhtälö $\frac{4}{3}\pi(r^3 - s^3) \cdot 7{,}7 = 47$. Tästä ratkeaa $s^3 = r^3 - \frac{3 \cdot 47}{4\pi \cdot 7{,}7} = \frac{141}{2\pi}(1 - \frac{1}{15{,}4})$, joten $s = \sqrt[3]{\frac{141}{2\pi}(1 - \frac{1}{15{,}4})} \approx 2{,}75821$ dm. Rautalevyn paksuus on $r - s \approx 0{,}06242$ dm. Vastaus: 6,2 mm.

11. Polynomi $f(x)$ on vähenevä välillä $[a, b]$, jos derivaatta $f'(x) \leq 0$ tällä välillä. Nyt $f'(x) = 3x^2 + 2x + q$. Ylöspäin aukeavana paraabelina tämä on negatiivinen vain nollakohtiensa välillä. Ts. jos $f'(x)$:llä on kaksi nollakohtaa x_1 ja x_2, niin $f(x)$ on vähenevä välillä $[x_1, x_2]$. Derivaatalla $f'(x)$ on kaksi nollakohtaa vain, jos diskriminantti $D = 4 - 12q > 0$ eli jos $q < 1/3$. Tällöin nollakohdat ovat $x = \frac{1}{6}(-2 \pm \sqrt{4 - 12q}) = \frac{1}{3}(-1 \pm \sqrt{1 - 3q})$. Vastaus: Tulee olla $q < 1/3$. Tällöin $f(x)$ on vähenevä välillä $[\frac{1}{3}(-1 - \sqrt{1 - 3q}), \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{1 - 3q})]$.

12. **a)** Tarjouksen mukaan yritys myisi pesukoneita tammikuussa $1{,}25 \cdot 470$, helmikuussa $1{,}25^2 \cdot 470$ ja kesäkuussa $1{,}25^6 \cdot 470 \approx 1793$. **b)** Kahden vuoden myynti olisi $1{,}25 \cdot 470 + 1{,}25^2 \cdot 470 + ... + 1{,}25^{24} \cdot 470$. Tämä on geometrinen sarja, jonka suhdeluku on 1,25 ja summa $1{,}25 \cdot 470 \cdot (1 - 1{,}25^{24})/(1 - 1{,}25) \approx 495\,282$. Vastaus: **a)** 1790 pesukonetta, **b)** 495 000 pesukonetta.

13. Kummassakin neliössä on neljä yhtenevää suorakulmaista kolmiota. Olkoon kussakin pienempi kateetti a, suurempi b ja hypotenuusa c. On osoitettava, että $a^2 + b^2 = c^2$. Vasemmanpuolinen neliö koostuu näistä neljästä kolmiosta ja kahdesta neliöstä ja on alaltaan $2ab + a^2 + b^2$. Oikeanpuolinen neliö koostuu samoista neljästä kolmiosta ja yhdestä neliöstä ja on alaltaan $2ab + c^2$. Vasemman- ja oikeanpuolinen neliö ovat yhtäsuuret, joten $2ab + a^2 + b^2 = 2ab + c^2$ eli $a^2 + b^2 = c^2$, mikä piti osoittaa.

14. Olkoon Anjan osuus talletuksesta x euroa, jolloin Arton osuus on $9500 - x$ euroa. Anja saa nostaa talletuksensa vuoden 2008 alussa, jolloin se on kasvanut 5 vuotta. Arto saa nostaa omansa vuoden 2012 alussa, jolloin se on kasvanut 9 vuotta. Koska nostojen on oltava yhtä suuret ja korkokanta on 2,5 %, saadaan yhtälö $1{,}025^5 x = 1{,}025^9(9500 - x)$ eli $x = 1{,}025^4(9500 - x)$. Tämän ratkaisu on $x = 1{,}025^4 \cdot 9500/(1 + 1{,}025^4) \approx 4984{,}389$, joten $9500 - x \approx 4515{,}611$. Vastaus: Anjan tilille 4984,39 ja Arton tilille 4515,61 euroa.

15. Merkitään kokeiden osallistujamäärää n:llä. Kokeen k keskiarvo on $\overline{k} = S_k/n$, $k = x, y$ ja hajonta $s_k = \sqrt{nT_k - S_k^2}/n$, $k = x, y$. Sijoittamalla arvot saadaan keskiarvoiksi $\overline{x} = 3805/242 \approx 15{,}72$, $\overline{y} = 1772/242 \approx 7{,}32$, ja hajonnoiksi $s_x = \sqrt{242 \cdot 62741 - 3805^2}/242 \approx 3{,}47$, $s_y = \sqrt{242 \cdot 18540 - 1772^2}/242 \approx 4{,}80$. Koetulosten välinen korrelaatiokerroin on $r_{xy} = \dfrac{nU_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{nT_x - S_x^2}\sqrt{nT_y - S_y^2}} \approx 0{,}36$.