Lyhyt matematiikka 30.3.2005, ratkaisut:

1. **a)** Yhtälö $3x + 2 = x - 4(5x - 1)$ sieventyy muotoon $22x = 2$. Ratkaisu on $x = \frac{1}{11}$.
b) Kertomalla puolittain 30:llä saadaan yhtälö muotoon $3x + 2x = 30x + 30$ eli $25x = -30$. Tämän ratkaisu on $x = -\frac{30}{25} = -\frac{6}{5}$.
Vastaus: **a)** $x = \frac{1}{11}$, **b)** $x = -\frac{6}{5}$.

2. Pythagoraan lauseen mukaan $x^2 + (3x + 3)^2 = 25^2$. Tämä on toisen asteen yhtälö $10x^2 + 18x - 616 = 0$. Sen ratkaisu on $x = \frac{1}{20}(-18 \pm \sqrt{324 + 24640}\,) = \frac{1}{20}(-18 \pm 158)$ eli $x = -8{,}8$ tai $x = 7$. Koska kateetin pituus on positiivinen, vain jälkimmäinen ratkaisu kelpaa. Toisen kateetin pituus on $3x + 3 = 24$. Vastaus: 7 ja 24.

3. Yhdentoista ensimmäisen kuukauden menot ovat $11 \cdot 1651{,}20 = 18163{,}20$, joten koko vuoden menojen kuukausikeskiarvo on $\frac{1}{12}(18163{,}20 + 1814{,}88) = 1664{,}84$. Vastaus: 1664,84 euroa.

4. **a)** Annostusnopeus 75 kg potilaalle on 750 μg/min. Tiputusliuosta on minuutissa annettava $750/500 = 1{,}5$ millilitraa. **b)** 465 ml:n tiputus kestää $465 \cdot 500/750 = 310$ minuuttia eli 5 h 10 min. Vastaus: **a)** 1,5 millilitraa, **b)** 5 h 10 min.

5. Olkoon neljäkäs $ABCD$, missä kulma $\angle DAB = 81^\circ$ ja olkoon $h = DE$ neljäkkään korkeus. Tällöin kolmio AED on suorakulmainen ja $h = 98{,}5 \sin 81^\circ = 97{,}2873$ m. Neljäkkään ala on $a = AB \cdot h = 98{,}5h = 9582{,}7992$ m^2 $= 0{,}9582$ ha. Tontin neliömetrihinta on $10\,000/a = 1{,}0435$ euroa. Vastaus: Pinta-ala on 0,958 ha ja neliömetrihinta 1,04 euroa.

6. Porausreiän tilavuus $V = \pi r^2 h$, missä reiän säde $r = 7{,}0$ cm ja syvyys $h = 5720$ cm. Polkujen pinta-ala $A = pd$, missä pituus $p = 7250$ cm ja leveys $d = 45$ cm. Poluille levitettävän kerroksen paksuus $x = \dfrac{V}{A} = \dfrac{\pi 7^2 \cdot 5720}{7250 \cdot 45} \approx 2{,}6989$ cm. Vastaus: 2,7 cm.

7. Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 17$ derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$. $f'(x) = 2$, kun $3x^2 - 4x + 1 = 0$. Tämän toisen asteen yhtälön ratkaisu on $x = \frac{1}{6}(4 \pm \sqrt{16 - 12}) = \frac{1}{6}(4 \pm 2)$ eli $x = 1$ tai $x = \frac{1}{3}$. Vastaus: Kohdissa $x = 1$ ja $x = \frac{1}{3}$.

8. Uusi ennakonpidätysprosentti on $100 - 73 - 0{,}8 = 26{,}2$ eli käteen jää 73,8 % palkasta. Jos vanha palkka on a, niin palkankorotuksen ja pidätysprosentin muuttumisen jälkeen jää käteen $0{,}738(a + 45)$. Tästä saadaan yhtälö $0{,}738(a + 45) - 0{,}73a = 49{,}60$ eli $0{,}08a = 16{,}39$, jonka ratkaisu on $a = 2048{,}75$. Vastaus: Uusi ennakonpidätysprosentti on 26,2 ja uusi palkka 2093,75 euroa.

9. **a)** Kuvio koostuu janoista AD ja BC, jotka leikkaavat BC:n ja AD:n yhteisessä keskipisteessä E. **b)** Pisteen E koordinaatit ovat $(\frac{1}{2}(357 + 471), \frac{1}{2}(519 + 125)) = (414, 322)$. **c)** E on myös janan AD keskipiste. Jos piste D on (x, y), on $\frac{1}{2}(132 + x) = 414$ ja $\frac{1}{2}(247 + y) = 322$. Näistä saadaan $x = 696$ ja $y = 397$. Vastaus: **b)** $(414, 322)$, **c)** $(696, 397)$.

10. **a)** Todennäköisyys 20 peräkkäiselle häviölle on $(\frac{1}{2})^{20} \approx 0{,}000000953 = 0{,}953 \cdot 10^{-6}$.
b) Yhteensä pelaaja on menettänyt n häviön jälkeen $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$ euroa. Tämän geometrisen summan arvo on $2^n - 1$ euroa. Siis, jos pelaaja häviää 20 kertaa peräkkäin ja voittaa 21. kerralla, on hänen voittonsa $2^{20} - (2^{20} - 1)) = 1$ euro.
Vastaus: **a)** $0{,}953 \cdot 10^{-6}$, **b)** 1 euro.

11. Paraabelin pisteessä (x, x^2+2x-1) on koordinaattien summa $f(x) = x^2+3x-1$. Tämä kuvaa edelleen ylöspäin aukeavaa paraabelia, joten sen pienin arvo löytyy derivaatan nollakohdasta. $f'(x) = 2x + 3 = 0$, kun $x = -\frac{3}{2}$. Tällä arvolla $y = \frac{9}{4} - 3 - 1 = -\frac{7}{4}$.
Vastaus: Pisteessä $(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4})$.

12. **a)** Oikean lämpötilan y ja mitatun lämpötilan x välinen yhteys on $y = ax + b$. Kertoimet a ja b määräytyvät ehdoista $-9{,}2 = -9{,}9a+b$ ja $18{,}1 = 18{,}5a+b$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan, että $28{,}4a = 27{,}3$ eli $a \approx 0{,}961268$, josta $b \approx 0{,}316549$.
b) Jos lämpömittari näyttää oikein lämpötilassa x, on $x = 0{,}961268x + 0{,}316549$. Tästä saadaan $x \approx 8{,}173$. Vastaus: **a)** $y = 0{,}9613x + 0{,}3165$, **b)** $8{,}2^{\circ}$.

13. Jos Richterin asteikossa voimakkuudeltaan 6,8 olevassa järistyksessä vapautuu energia E_1, niin $\log_{10} E_1 = 11{,}8 + 1{,}5 \cdot 6{,}8 = 22{,}0$.Tästä saadaan $E_1 = 10^{22}$. Energia, joka on 50 % suurempi, on $E_2 = 1{,}5 \cdot 10^{22}$. Jos tätä vastaava Richterin asteikon lukema on M, on $\log_{10} E_2 = 11{,}8 + 1{,}5M$. Tästä saadaan $M = \frac{1}{1{,}5}(\log_{10}(1{,}5 \cdot 10^{22}) - 11{,}8) = \frac{1}{1{,}5}(\log_{10} 1{,}5 + 10{,}2) \approx 6{,}9174$. Vastaus: 6,9.

14. **a)** Lainan kuukausierä ilman lisämaksua saadaan kaavasta $A_1 = Kq^n \dfrac{1-q}{1-q^n}$, missä K on lainasumma, q korkotekijä ja n lyhennysten lukumäärä. Sijoittamalla $K = 1200$ euroa ja $q = 1{,}019$ saadaan, että $A_1 \approx 112{,}77579$ euroa. Tähän on vielä lisättävä lisämaksu $A_2 = 0{,}004K = 4{,}8$ euroa, joten kokonaiskuukausierä $A = A_1 + A_2 = 117{,}57579$ euroa. Lainan kokonaiskustannus on $12A = 1410{,}90948$ euroa. Vastaus: Kuukausierä on 118 euroa ja lainan kokonaiskustannukset 1411 euroa.
b) Jos tasaerälainan vuosikorko on 31 %, on kuukausierän korkotekijä $r = 1 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}31$. Kuukausierän suuruus on nyt $1200r^n \dfrac{1-r}{1-r^n} \approx 117{,}57560$ euroa, mikä on sentin tarkkuudella sama kuin a)-kohdan kuukausierä A. Tämä todistaa väitteen.

15. Jos x_0 on koneelle asetettu paino ja x pussin massa, on määrättävä x_0 niin, että $P(x \geq 1000) = 0{,}95$ normaalijakaumassa $N(x_0, 8)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0,1)$ muunnoksella $z = \dfrac{x - x_0}{8}$, $z_0 = \dfrac{1000 - x_0}{8}$. Tällöin $0{,}95 = P(x \geq 1000) = P(z \geq z_0) = P(z \leq -z_0) = \Phi(-z_0)$. Taulukon mukaan $-z_0 = 1{,}645$ eli $\dfrac{1000 - x_0}{8} = -1{,}645$. Tästä saadaan $x_0 = 1013{,}16$. Vastaus: Koneelle asetetaan painoksi 1013 g.