Lyhyt matematiikka 16.3.2007, ratkaisut:

1. **a)** $\frac{3}{4}(x-\frac{1}{12})=\frac{1}{3}(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}) \iff \frac{3}{4}x-\frac{1}{16}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{15} \iff \frac{1}{2}x=\frac{1}{16}-\frac{1}{15}=-\frac{1}{15\cdot 16} \iff x=-\frac{1}{120}$.

b) Poistamalla sulut yhtälö tulee muotoon $49x^2+21x-4=0$. Tämän ratkaisu on $x=\dfrac{-21\pm\sqrt{21^2+16\cdot 49}}{98}=\dfrac{-21\pm 35}{98}$. Siis $x=\frac{1}{7}$ tai $x=-\frac{4}{7}$.

c) Kun $x=a-1$, on lausekkeen arvo $\dfrac{a(a-1)}{a-1}+a(a-1)=a+a^2-a=a^2$.

Vastaus: **a)** $x=-\frac{1}{120}$, **b)** $x=-\frac{4}{7}$ tai $x=\frac{1}{7}$, **c)** a^2.

2. **a)** Jos lyhyempää kateettia vastaava kulma on α, on $\tan\alpha=\frac{1}{3}$, josta $\alpha\approx 18{,}4349^{\circ}\approx 18{,}43^{\circ}$. Toinen terävä kulma on $90^{\circ}-\alpha\approx 71{,}57^{\circ}$.

b) Funktion derivaatta on $f'(x)=3\cdot\frac{1}{3}x^2+2\cdot\frac{3}{2}x-4=x^2+3x-4$.

c) Geometrinen lukujono on muotoa $a,\ aq,\ aq^2,\ldots$. Nyt $a=\frac{2}{3}$ ja $aq=\frac{4}{9}$, joten $q=\dfrac{4/9}{2/3}=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{3}$. Siten $aq^2=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{8}{27}$.

Vastaus: **a)** $18{,}43^{\circ}$ ja $71{,}57^{\circ}$, **b)** x^2+3x-4, **c)** $\frac{8}{27}$.

3. **a)** Jos suorakulmion toisen sivun pituus on x m, on $4{,}42\cdot x=32{,}2$, josta $x\approx 7{,}2851$.

b) Suorakulmion lävistäjän pituus $d=\sqrt{x^2+4{,}42^2}\approx\sqrt{72{,}6086}\approx 8{,}5211$.

Vastaus: **a)** 7,29 m ja 4,42 m, **b)** 8,52 m.

4. Jos tuotteen myyntitulot vuonna 2003 olivat a, niin vuonna 2004 ne olivat $1{,}05a$. Vuonna 2005 ne olivat $1{,}03\cdot 1{,}05a=1{,}0815a$. Valmistuskustannukset vuonna 2003 olivat $0{,}91a$, vuonna 2004 vastaavasti $1{,}071\cdot 0{,}91a$. Vuonna 2005 valmistuskustannukset olivat $1{,}012\cdot 1{,}071\cdot 0{,}91a=0{,}98630532a$. Siten myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat $100\cdot(\dfrac{1{,}0815a}{0{,}98630532a}-1)\approx 9{,}65164$ prosenttia.

Vastaus: 9,65 %.

5. **a)** Suoran kulmakerroin on $\dfrac{3-2}{4-1}=\dfrac{1}{3}$. Näin ollen suoran yhtälö on $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$ eli $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

b) Sijoitetaan pisteen x-koordinaatti yhtälöön: $y=\frac{1}{3}\cdot 120+\frac{5}{3}=40+\frac{5}{3}\neq 40$, mikä on pisteen y-koordinaatti. Näin ollen piste ei ole suoralla.

6. **a)** $2^x=1=2^0$, kun $x=0$.

b) Edellisen mukaan $2^{x^2-2}=1$, kun $x^2-2=0$ eli kun $x=\pm\sqrt{2}$.

Vastaus: **a)** $x=0$, **b)** $x=\pm\sqrt{2}$.

7. Olkoon A piste, missä lentokone koskettaa kiitorataa, B piste, jossa lentokone oli 500 jalan korkeudessa ja C pisteen B kohtisuora projektio kiitoradan tasoon. Nyt $BC = 0{,}3048 \cdot 500 = 152{,}4$ (m). Jos $AC = x$ m ja $AB = y$ m, on $\tan 3^{\circ} = \dfrac{152{,}4}{x}$, josta $x = \dfrac{152{,}4}{\tan 3^{\circ}} \approx 2907{,}965$ ja $\sin 3^{\circ} = \dfrac{152{,}4}{y}$, josta $y = \dfrac{152{,}4}{\sin 3^{\circ}} \approx 2911{,}956$. Kysytty etäisyys kiitoradan alkupäästä oli $x - 300 \approx 2607{,}965$ (m). Maakosketukseen kuluva aika oli sekunneissa $\dfrac{3{,}6y}{270} \approx 38{,}83$.

Vastaus: Etäisyys oli 2600 m ja aika 39 s.

8. Funktion $f(x) = 3x - 4x^2 - x^3$ derivaatta on $f'(x) = 3 - 8x - 3x^2$. Derivaatta häviää, kun $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{-6} = \dfrac{8 \pm 10}{-6}$ eli kun $x = -3$ tai $x = \frac{1}{3}$. Näistä vain jälkimmäinen kuuluu tarkasteluvälille [-1,3]. Koska $f(-1) = -6$, $f(3) = -54$ ja $f(\frac{1}{3}) = \frac{14}{27}$, on välillä [-1,3] funktion suurin arvo $\frac{14}{27}$ ja pienin -54.

Vastaus: Suurin arvo on $\frac{14}{27}$ ja pienin -54.

9. Jos Veeran ikä Lauran 20-vuotispäivänä on x vuotta, on $1{,}25x = 20$, josta $x = \dfrac{20}{1{,}25} = 16$. Kun Laura täyttää 30 vuotta, on Veeran ikä $16+10 = 26$ vuotta. Laura on tällöin $100(\dfrac{30}{26} - 1) \approx 15{,}38$ prosenttia Veeraa vanhempi.

Vastaus: 15,4 %.

10. Kussakin kiinteässä paikassa on kaksi mahdollisuutta, piste tai ei mitään. Koska paikkoja on kuusi, on mahdollisuuksia 2^6. Vaihtoehto, jossa kaikki ovat tyhjiä, ei kuitenkaan kelpaa, joten esitettävien merkkien määrä on $2^6 - 1 = 63$.

Vastaus: 63 erilaista merkkiä.

11. **a)** Jos vuorokaudessa lääkkeestä häviää 35 %, niin jäljelle jää 65 %. Lääkettä on elimistössä milligrammoina välittömästi ensimmäisen oton jälkeen 60, toisen oton jälkeen $0{,}65 \cdot 60 + 60 = 60(0{,}65 + 1) = 99$, kolmannen oton jälkeen $60(0{,}65^2 + 0{,}65 + 1)$, neljännen oton jälkeen $60(0{,}65^3 + 0{,}65^2 + 0{,}65 + 1)$ ja lopulta viidennen oton jälkeen $60(0{,}65^4 + 0{,}65^3 + 0{,}65^2 + 0{,}65 + 1) = 60 \cdot \dfrac{1 - 0{,}65^5}{1 - 0{,}65} \approx 151{,}5379$.

b) Edellisen perusteella voidaan päätellä, että välittömästi n:nnen ottokerran jälkeen lääkettä on elimistössä $60 \cdot \dfrac{1 - 0{,}65^n}{1 - 0{,}65} = \dfrac{60}{0{,}35}(1 - 0{,}65^n) = \dfrac{1200}{7}(1 - 0{,}65^n)$ (mg).

c) Mitä korkeampaan potenssiin n korottaa ykköstä pienempää suuretta 0,65, sitä pienemmäksi se tulee. Esimerkiksi $0{,}65^{10} \approx 0{,}013$, $0{,}65^{20} \approx 0{,}00018$ ja $0{,}65^{40} \approx 0{,}00000003$. Näin ollen lääkkeen määrä näyttää ottokertojen määrän n kasvaessa lähestyvän arvoa $\dfrac{1200}{7} \approx 171{,}429$ (mg).

Vastaus: **a)** Lääkettä on toisen oton jälkeen 99 mg ja viidennen jälkeen 151,5 mg, **b)** $\dfrac{1200}{7}(1 - 0{,}65^n)$ mg, **c)** 171,4 mg.

12. Paraabelin $y = ax^2 + bx - 3$ derivaatta $y' = 2ax + b$ häviää huipussa. Siis $2a\frac{3}{2} + b = 0$, josta saadaan $b = -3a$. Paraabeli kulkee pisteen $(\frac{3}{2}, 1)$ kautta, joten $a(\frac{3}{2})^2 - 3a\frac{3}{2} - 3 = 1$ eli $-\frac{9}{4}a = 4$, josta saadaan $a = -\frac{16}{9}$. Siis $b = -3 \cdot (-\frac{16}{9}) = \frac{16}{3}$.

Vastaus: $a = -\frac{16}{9}$ ja $b = \frac{16}{3}$.

13. **a)** Kehän halkaisijan pituus millimetreissä on $d = 25{,}40 \cdot 26{,}0 = 660{,}4$. Kehän pituus on $\pi d \approx 2074{,}708$ (mm) $\approx 2{,}0747$ (m).

b) Matkan pituudeksi mittari saa $\dfrac{20000}{2{,}0747} \cdot 2{,}095 \approx 20195{,}6$ (m) $\approx 20{,}196$ (km). Polkupyörän todellinen nopeus on $\dfrac{2{,}0747}{2{,}095} \cdot 30 \approx 29{,}71$ (km/h).

Vastaus: **a)** 2075 mm, **b)** Matka 20,196 km ja nopeus 29,71 km/h.

14. Leikataan pallo kartion akselin kautta kulkevalla tasolla. Olkoon O kartion akselilla oleva pallon keskipiste, A kartion pohjaympyrän keskipiste ja B pohjan ja pallon leikkauspiste tasolla. Jos pallon säde on 3 ja $OA = x$, on kartion korkeus $h = x + 3$. Kolmiosta OAB saadaan pohjaympyrän säteeksi $r = \sqrt{9 - x^2}$. Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Lausuttuna x:n avulla kartion tilavuus on $V(x) = \frac{1}{3}\pi(9 - x^2)(x + 3) = \frac{1}{3}\pi(27 + 9x - 3x^2 - x^3)$. Sen derivaatta on $V'(x) = \frac{1}{3}\pi(9 - 6x - 3x^2) = \pi(3 - 2x - x^2)$. Derivaatta on nolla, kun $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = -1 \pm (-2)$ eli kun $x = -3$ tai $x = 1$. Näistä vain jälkimmäinen kelpaa. Koska $V'(x)$ on alaspäin aukeava paraabeli, on $V'(x) > 0$, kun $0 < x < 1$ ja $V'(x) < 0$, kun $1 < x < 3$. Näin ollen kartion tilavuuden suurin arvo saavutetaan arvolla $x = 1$ ja se on $V(1) = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot 4 = \frac{32}{3}\pi \approx 33{,}5103$.

Vastaus: $\frac{32}{3}\pi \approx 33{,}51$.

15. **a)** Osakkeiden arvo oli ensimmäisen vuoden jälkeen $(1 - 0{,}156) \cdot 1200 = 0{,}844 \cdot 1200$ (euroa) ja toisen vuoden jälkeen $1{,}081 \cdot 0{,}844 \cdot 1200$ (euroa). Jos tarvittava kurssinousuprosentti on x, saadaan yhtälö $(1 + 0{,}01x) \cdot 1{,}081 \cdot 0{,}844 \cdot 1200 = 1200$, josta saadaan $1 + 0{,}01x = \dfrac{1}{1{,}081 \cdot 0{,}844}$ ja lopulta $x = 100(\dfrac{1}{1{,}081 \cdot 0{,}844} - 1) \approx 9{,}60537$.

b) Lasketaan ensin todennäköisyys sille, että osakkeiden arvo on korkeintaan alkuperäisen suuruinen eli $P(x \leq 9{,}605)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan muunnoksella $z = \dfrac{x - 7}{5}$, $z_0 = \dfrac{9{,}605 - 7}{5} = 0{,}521$. Tällöin saadaan taulukosta $P(x \leq 9{,}605) = P(z \leq 0{,}521) = \Phi(0{,}521) \approx 0{,}6988$. Kysytty todennäköisyys on nyt $1 - P(x \leq 9{,}605) \approx 0{,}3012$.

Vastaus: **a)** 9,6 %, **b)** 30 %.