



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

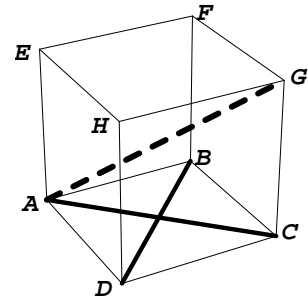
1. a) Ratkaise yhtälö $7x^2 - 6x = 0$.
b) Ratkaise epäyhtälö $|3x - 2| < 4$.
c) Sievennä lauseke $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ ($a > 0$).
2. a) Laske integraali $\int_0^{\frac{1}{2}} (1 + 2x^2) dx$.
b) Määritä funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ derivaatta $f'(1)$.
c) Sievennä lauseke $e^{2\ln x} - 2x^2$.
3. a) Merivettä, jossa on 4,0 painoprosenttia suolaa, haihdutetaan altaassa, kunnes sen massa on vähentynyt 28 %. Mikä on suolapitoisuus haihduttamisen jälkeen? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
b) Mikä on vuotuinen korkoprosentti, jos tilille talletettu rahamäärä kasvaa korkoa korolle 1,5-kertaiseksi 10 vuodessa? Lähdeveroa ei oteta huomioon. Anna vastaus prosentin sadasosan tarkkuudella.
4. Määritä jokin pisteiden $A = (2, 3, 6)$ ja $B = (4, -7, -3)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori ja muodosta suoran parametriesitys. Määritä suoran ja xy -tason leikkauspiste.
5. Laske suorien $x + y = 1$, $x + y = 6$, $x - 3y = 1$ ja $x - 3y = -4$ väliin jäävän alueen pinta-ala.
6. Ratkaise epäyhtälö $\frac{x^2 + 7x + 2}{x - 3} > 1$.
7. Suoran ympyräpohjaisen kartion sisään asetetaan tilavuudeltaan suurin mahdollinen suora ympyräpohjainen lieriö, jonka akseli on kartion akselilla, pohjista toinen on kartion pohjalla ja toisen kehä koskettaa kartion vaippaa. Kartion korkeus on 6 pituusyksikköä ja pohjan säde on r . Määritä lieriön korkeus.
8. Satunnaismuuttuja X saa arvoja väliltä $[0, 1]$, ja sen tiheysfunktio on muotoa

$$f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{2}.$$

Määritä vakio a . Millä todennäköisyydellä X on välillä $[0, \frac{1}{2}]$?

KÄÄNNÄ!

9. Laske kuution avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän AC suuntien välinen kulma $0,1$ asteen tarkkuudella. Laske edelleen avaruuslävistäjän AG ja sivutahkon lävistäjän BD suuntien välinen kulma.



10. Jonon (a_n) termit ovat muotoa $a_n = \frac{2n-2}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Osoita, että kaikille termeille pätee $a_n < 2$ ja $a_{n+1} > a_n$. Määritä raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
11. Olkoon f funktio, jolla on seuraavat ominaisuudet: $f(x+y) = f(x)f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y , $f(0) = 1$ ja f on derivoituva muuttujan arvolla 0 . Osoita erotusosamäärää käyttäen, että f on derivoituva kaikkialla ja että $f'(x) = f'(0)f(x)$. Anna esimerkki funktiosta, joka toteuttaa nämä ehdot.
12. Laske integraalin $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ tarkka arvo. Laske sille myös viisidesimaalinen likiarvo puolisuunnikassäännöllä käyttämällä neljää jakoväliä. Mikä on likiarvon suhteellinen virhe prosentteina?
13. Olkoon n alkuluku sekä x ja y kokonaislukuja. Osoita, että

$$x^n + y^n \equiv (x+y)^n \pmod{n}.$$

- ★14. Olkoon $P_n(x) = \sum_{i=1}^n x^i$ välillä $-1 < x < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
- a) Perustele, miksi raja-arvo $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$ on olemassa välillä $-1 < x < 1$. Määritä $f(x)$.
- b) Johda ja sievennä erotuksen $P_n(x) - f(x)$ itseisarvon lauseke.
- c) Kuinka suuri on polynomien $P_n(x)$ asteluvun n vähintään oltava, jotta

$$|P_n(-0,5) - f(-0,5)| \leq 0,01?$$

- ★15. a) Olkoon $a > 0$, $b > 0$ ja $0 < p < 2$. Näytä, että $pab < a^2 + b^2$. (3 pistettä)
- b) Osoita, että jos suorakulmaisella kolmiolla ja neliöllä on sama pinta-ala, niin kolmion piiri on pidempi kuin neliön piiri. (6 pistettä)