Pitkä matematiikka 16.3.2007, ratkaisut:

1. **a)** $7x^2 - 6x = 0 \iff x(7x-6) = 0 \iff x = 0$ tai $x = \frac{6}{7}$.

b) $|3x-2| < 4 \iff -4 < 3x-2 < 4$. Nyt $-4 < 3x-2 \iff 3x > -2 \iff x > -\frac{2}{3}$ ja $3x - 2 < 4 \iff 3x < 6 \iff x < 2$. Epäyhtälön ratkaisu on siis $-\frac{2}{3} < x < 2$.

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^{3/2}} = (a^{3/2})^{1/3} = a^{1/2} = \sqrt{a}$.

2. **a)** $\int_0^{1/2}(1+2x^2)dx = \Big/_0^{1/2} x + \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Siis $f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c) $e^{2\ln x} - 2x^2 = e^{\ln x^2} - 2x^2 = x^2 - 2x^2 = -x^2$.

3. **a)** Jos merivettä on $100a$, on siinä vettä $96a$ ja suolaa $4a$. Haihdutuksen jälkeen jäljellä on vettä $96a - 28a = 68a$ ja suolaa edelleen $4a$ eli yhteensä $72a$ merivettä. Sen suolaprosentti on nyt $100 \cdot \dfrac{4a}{72a} = \dfrac{50}{9} \approx 5{,}5556$. *Vastaus:* 5,6 %.

b) Jos korkoprosentti on p, on korkotekijä $q = 1 + p/100$. Tehtävän mukaan rahamäärän a kasvulle pätee $q^{10}a = 1{,}5a$ eli $q^{10} = 1{,}5$. Tästä saadaan $q = \sqrt[10]{1{,}5} \approx 1{,}04138$, josta edelleen $p = 100(q-1) \approx 4{,}138$. *Vastaus:* 4,14 %.

4. Pisteiden A ja B paikkavektorit ovat $\overline{OA} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$ ja $\overline{OB} = 4\bar{i} - 7\bar{j} - 3\bar{k}$. Kysytty suuntavektori on $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2\bar{i} - 10\bar{j} - 9\bar{k}$. Suoran pisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = \overline{OA} + t\overline{AB} = (2+2t)\bar{i} + (3-10t)\bar{j} + (6-9t)\bar{k}$. Suoran parametriesitys on siten $x = 2+2t,\ y = 3-10t,\ z = 6-9t$.

Suora leikkaa xy-tason, kun $z = 0$ eli kun $6 - 9t = 0$. Näin tapahtuu, kun $t = \frac{2}{3}$. Leikkauspisteen koordinaatit ovat $x = 2 + 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ ja $y = 3 - 10\cdot\frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$.

Vastaus: Parametriesitys on $x = 2+2t,\ y = 3-10t,\ z = 6-9t$ ja leikkauspiste $(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0)$.

5. Suorien $x+y = 1$ ja $x-3y = 1$ leikkauspiste saadaan yhtälöparista $x+y = 1,\ x-3y = 1$, jonka ratkaisu on $x = 1,\ y = 0$. Näin jatkamalla nähdään, että suora $x+y = 1$ leikkaa suoria $x-3y = 1$ ja $x-3y = -4$ pisteissä $A = (1,0)$ ja $B = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$. Samoin nähdään, että suora $x+y = 6$ leikkaa suoria $x-3y = 1$ ja $x-3y = -4$ pisteissä $D = (\frac{19}{4}, \frac{5}{4})$ ja $C = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$. Vaakasuora jana DE jakaa tarkasteltavan nelikulmion $ABCD$ kahteen kolmioon. Kolmion ABD ala on $\frac{1}{2}\cdot(\frac{19}{4} - (-\frac{1}{4}))\cdot\frac{5}{4} = \frac{25}{8}$, ja kolmion BCD ala $\frac{1}{2}\cdot(\frac{19}{4} - (-\frac{1}{4}))\cdot(\frac{5}{2} - \frac{5}{4}) = \frac{25}{8}$. Kysytyn nelikulmion $ABCD$ ala on siis $\frac{25}{8} + \frac{25}{8} = \frac{25}{4}$.
Vastaus: $\frac{25}{4}$.

6. Kun $x > 3$, saadaan epäyhtälö muotoon $x^2 + 7x + 2 > x - 3$ eli $x^2 + 6x + 5 > 0$. Vasemman puolen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Sen nollakohdat ovat $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = -3 \pm 2$ eli $x = -5$ ja $x = -1$. Näin ollen $x^2 + 6x + 5 > 0$, kun $x < -5$ tai $x > -1$. Alueessa $x > 3$ on siis $x^2 + 6x + 5 > 0$ kaikilla arvoilla x.

Kun $x < 3$, saadaan epäyhtälö muotoon $x^2 + 7x + 2 < x - 3$ eli $x^2 + 6x + 5 < 0$. Edellisen mukaan $x^2 + 6x + 5 = 0$, kun $x = -5$ ja $x = -1$. Näin ollen alueessa $x < 3$ on $x^2 + 6x + 5 < 0$, kun $-5 < x < -1$.

Vastaus: Kun $-5 < x < -1$ tai $x > 3$.

7. Leikataan kartiota sen akselin kautta kulkevalla tasolla. Olkoon leikkauskuviossa A pohjaympyrän keskipiste ja $r = AC$ säde sekä B kartion huippu. Olkoon vielä $x = AD$ lieriön korkeus, $0 < x < 6$ ja $s = ED$ lieriön säde. Yhdenmuotoisista kolmioista ABC ja DBE saadaan verranto $\dfrac{6}{r} = \dfrac{6-x}{s}$, josta edelleen $s = r - \frac{1}{6}rx$. Lieriön tilavuus $V = \pi s^2 x$ on x:n funktiona $V(x) = \pi r^2(1 - \frac{1}{6}x)^2 x = \pi r^2(x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36}x^3)$. Tämän derivaatta on $V'(x) = \pi r^2(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}x^2) = \frac{1}{12}\pi r^2(x^2 - 8x + 12)$. Derivaatta häviää, kun $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = 4 \pm 2$ eli kun $x = 2$ tai $x = 6$. Näistä vain edellinen on tarkastelualueella. Koska $V'(x) > 0$, kun $0 < x < 2$ ja $V'(x) < 0$, kun $2 < x < 6$, saavuttaa lieriön tilavuus suurimman arvonsa, kun $x = 2$.

Vastaus: Lieriön korkeus on 2.

8. Jotta f olisi tiheysfunktio, on oltava $f(x) \geq 0$, kun $0 \leq x \leq 1$ sekä $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Nyt $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{1}{a}x + \frac{a}{2})dx = \Big/_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{a}x^2 + \frac{a}{2}x = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + a)$. Integraalin arvo on 1, jos $\frac{1}{a} + a = 2 \Longleftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Longleftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 1$.
Arvolla $a = 1$ on $f(x) = x + \frac{1}{2} > 0$, kun $0 \leq x \leq 1$. Näin ollen $f(x)$ on tiheysfunktio, kun $a = 1$.
Todennäköisyys, että X on välillä $[0, \frac{1}{2}]$ on $\int_0^{1/2}(x + \frac{1}{2})dx = \Big/_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.

Vastaus: $a = 1$ ja todennäköisyys on $\frac{3}{8}$.

9. Olkoon kuution sivun pituus a. Sijoitetaan kuutio koordinaatistoon siten, että $A = (0,0,0)$, $D = (a,0,0)$, $B = (0,a,0)$ ja $E = (0,0,a)$. Tällöin $\overline{AC} = a\bar{i} + a\bar{j}$, $|\overline{AC}| = a\sqrt{2}$ ja $\overline{AG} = a\bar{i} + a\bar{j} + a\bar{k}$, $|\overline{AG}| = a\sqrt{3}$. Näiden väliselle kulmalle α saadaan $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{AG}}{|\overline{AC}||\overline{AG}|} = \dfrac{a^2 + a^2}{a^2\sqrt{2}\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \approx 0{,}8164966$, joten $\alpha \approx 35{,}26439^\circ$.
Vektori $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = a\bar{i} - a\bar{j}$. Koska $\overline{AG}\cdot\overline{BD} = a^2 - a^2 = 0$, on vektoreiden välinen kulma $\beta = 90^\circ$.
Vastaus: Kysytyt kulmat ovat $35{,}3^\circ$ ja 90°.

10. Yleinen termi $a_n = \dfrac{2n-2}{n+1} = 2\cdot\dfrac{n-1}{n+1} < 2$, koska $\dfrac{n-1}{n+1} < 1$.
$a_{n+1} - a_n = 2(\dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n-1}{n+1}) = 2\cdot\dfrac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{4}{(n+1)(n+2)} > 0.$
Näin ollen aina $a_{n+1} > a_n$.
Lopulta $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$, sillä $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

11. Koska f on derivoituva arvolla 0, on olemassa $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$.
Pisteessä x on $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(x)f(h)-f(x)}{h} = f(x)\dfrac{f(h)-1}{h} = f(x)\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$.
Näin ollen on olemassa $f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)f'(0)$. Siis f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f(x)f'(0)$.
Esimerkiksi funktio $f(x) = e^x$ täyttää tehtävän ehdot: $f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$, $f(0) = e^0 = 1$ ja f on derivoituva arvolla 0.

12. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \Big/_1^3 \ln x = \ln 3 \approx 1{,}098612.$
Puolisuunnikassääntö funktiolle $f(x)$ välillä $[1,3]$ käyttäen neljää jakoväliä on $S(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}f(1)+f(\frac{3}{2})+f(2)+f(\frac{5}{2})+\frac{1}{2}f(3))$. Kun $f(x) = \frac{1}{x}$, on $S(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}) = \frac{67}{60} \approx 1{,}116667$. Siis $\int_1^3 \frac{1}{x} dx \approx \frac{67}{60} \approx 1{,}11667$.
Likiarvon suhteellinen virhe prosentteina on $100 \cdot \dfrac{\frac{67}{60} - \ln 3}{\ln 3} \approx 1{,}643$ eli 1,64 %.

13. Jos n on alkuluku ja z kokonaisluku, joka ei ole jaollinen n:llä, on Fermat'n pienen lauseen mukaan $z^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ eli $z^n \equiv z \pmod{n}$. Jos taas z on jaollinen n:llä, on olemassa kokonaisluku k siten, että $z = kn$. Tällöin $z^n - z = (kn)^n - kn = n(n^{n-1}k - k)$ eli $z^n \equiv z \pmod{n}$. Siis kun n on alkuluku ja z kokonaisluku, on $z^n \equiv z \pmod{n}$.
Jos nyt n on alkuluku ja $x,\ y$ kokonaislukuja, niin edellisen mukaan
$(x+y)^n \equiv x+y \pmod{n}$, $x \equiv x^n \pmod{n}$, $y \equiv y^n \pmod{n}$, $x+y \equiv x^n + y^n \pmod{n}$, jolloin $(x+y)^n \equiv x^n + y^n \pmod{n}$, mikä piti todistaa.

***14.** **a)** $P_n(x) = \sum_{i=1}^n x^i$ on geometrinen summa, jonka ensimmäinen termi on x ja suhdeluku $q = x$. Näin ollen summa on $P_n(x) = x\dfrac{1-x^n}{1-x}$. Kun $-1 < x < 1$, on $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, joten on olemassa $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x}{1-x}$. On osoitettu, että välillä $-1 < x < 1$ on olemassa raja-arvo $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

b) Edellisen mukaan $|P_n(x) - f(x)| = |x| \cdot |\dfrac{1-x^n}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}| = \dfrac{|x|^{n+1}}{1-x}$.

c) Edellisen mukaan $|P_n(-0{,}5) - f(-0{,}5)| \leq 0{,}01$, kun $\dfrac{|-0{,}5|^{n+1}}{1+0{,}5} \leq 0{,}01$ eli $(0{,}5)^{n+1} \leq 0{,}015$. Tästä saadaan ehdoksi $(n+1)\ln 0{,}5 \leq \ln 0{,}015$ eli $n+1 \geq \dfrac{\ln 0{,}015}{\ln 0{,}5} \geq 6{,}05$ eli $n \geq 6$. Asteluvun on siis oltava vähintään 6.

***15.** **a)** Jos $a > 0,\ b > 0$, on $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, joten $2ab \leq a^2 + b^2$. Koska $p < 2$, on $pab < 2ab$. Siis $pab < a^2 + b^2$, mikä piti todistaa.

b) Olkoon suorakulmaisen kolmion kateetit a ja b sekä neliön sivu c. Tällöin kolmion kolmas sivu on $\sqrt{a^2+b^2}$. Koska pinta-alat ovat samat, on $\frac{1}{2}ab = c^2$, josta saadaan $c = \sqrt{\frac{1}{2}ab}$. Väite on nyt $a + b + \sqrt{a^2+b^2} > 4c$ eli $a + b + \sqrt{a^2+b^2} > 2\sqrt{2ab}$ eli $a + b + \sqrt{a^2+b^2} - 2\sqrt{2ab} > 0$.
Koska $b > 0$, on $\sqrt{a^2+b^2} > a$. Näin ollen $a+b+\sqrt{a^2+b^2} - 2\sqrt{2ab} > 2a+b-2\sqrt{2ab} = (\sqrt{2a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Siis $a + b + \sqrt{a^2+b^2} > 4c$, mikä piti todistaa.