Lyhyt matematiikka 12.3.2008, ratkaisut:

1. **a)** $2x+1=x^2+2x \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$.

b) Laskemalla yhtälöt yhteen saadaan $3x=1$ eli $x=\frac{1}{3}$. Edelleen, $y=x=\frac{1}{3}$.

c) $\frac{5}{7}-\frac{6}{9}=\frac{45}{63}-\frac{42}{63}=\frac{3}{63}>0$. Siis $\frac{5}{7}>\frac{6}{9}$.

Vastaus: **a)** $x=\pm 1$, **b)** $x=y=\frac{1}{3}$, **c)** $\frac{5}{7}>\frac{6}{9}$.

2. **a)** $5x-(1-x)=13x \iff 6x-1=13x \iff 7x=-1 \iff x=-\frac{1}{7}$.

b) Luvut ovat suuruusjärjestyksessä 1, 3, 3, 3, 5, 6, 7. Mediaani on 3. Keskiarvo on $\dfrac{1+3+3+3+5+6+7}{7}=4$.

c) $\dfrac{a+3}{a}:\dfrac{3a+9}{2a}=\dfrac{a+3}{a}\cdot\dfrac{2a}{3(a+3)}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a(a+3)}{a(a+3)}=\dfrac{2}{3}$.

Vastaus: **a)** $x=-\frac{1}{7}$, **b)** mediaani 3, keskiarvo 4, **c)** $\frac{2}{3}$.

3. **a)** Jos rinteen pituus on x metriä, on $\dfrac{180}{x}=\sin 7^{\circ}$, josta $x=\dfrac{180}{\sin 7^{\circ}}\approx 1476{,}99$. Hiihtohissin nopeus on 6 km/h = 100 m/min. Hiihtohissillä matka kestää $\dfrac{x}{100}$ min ≈ 14 min 46 s.

b) Suoran suuntakulmalle α pätee: $\tan\alpha=\frac{3-0}{3-1}=\frac{3}{2}$. Tästä saadaan $\alpha\approx 56{,}310^{\circ}$.

Vastaus: **a)** Rinne 1480 m, hissimatka kestää 14 min 50 s. **b)** $56{,}3^{\circ}$.

4. Kumiputken sisäsäde on $\frac{53}{2}-4$ mm $=22{,}5$ mm $=2{,}25$ cm. Jos putken pituus on x cm, on $\pi 2{,}25^2 x=3000$, josta $x=\dfrac{3000}{\pi 2{,}25^2}\approx 188{,}628$.

Vastaus: 189 cm.

5. Jos x on puheaika minuutteina, kuukausilasku on A liittymässä $4+0{,}09x$ (euroa) ja B liittymässä $0{,}12x$ (euroa). Kun laskut ovat yhtäsuuret, on $4+0{,}09x=0{,}12x$, josta $x=\dfrac{4}{0{,}03}=133\frac{1}{3}$ (min) = 2 h 13 min 20 s.

6. Jos äänen intensiteetti oli aluksi x ja sitten y, oli $\dfrac{y}{x}=(\dfrac{50}{15})^2=\dfrac{100}{9}$. Kysytylle prosenttiluvulle p pätee $1+\dfrac{p}{100}=\dfrac{100}{9}$, josta $p=1011\frac{1}{9}$.

Vastaus: Intensiteetti kasvoi 1010 %.

7. Alaspäin aukeavan paraabelin $h(t)=-0{,}15t^2+2{,}4t+1{,}8$ ylin piste löytyy derivaatan nollakohdasta. Derivaatta $h'(t)=-0{,}30t+2{,}4$ häviää, kun $t=\frac{2{,}4}{0{,}3}=8$. Korkein piste on $h(8)=-0{,}15\cdot 8^2+2{,}4\cdot 8+1{,}8=11{,}4$ (m). Lentorata laskee korkeimman pisteen jälkeen kunnes $h(t)=0$ eli $-0{,}15t^2+2{,}4t+1{,}8=0$. Näin on, kun $t=\dfrac{-2{,}4\pm\sqrt{5{,}76+1{,}08}}{-0{,}30}\approx\dfrac{2{,}4\pm 2{,}61534}{0{,}3}=16{,}7178$ (s). Negatiivinen arvo hylättiin, koska on oltava $t>0$.

Vastaus: Pallo käy 11,4 m korkeudessa. Lentorata laskee aikavälillä 8 s - 16,7 s.

8. Viiden mustan pallon todennäköisyys $P_M = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{12}{143} \approx 0{,}083916$. Ainakin yhden punaisen pallon todennäköisyys on tämän komplementtitapaus eli on $1 - P_M = \frac{131}{143} \approx 0{,}916084$.
Viiden punaisen pallon todennäköisyys $P_P = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{3003} \approx 0{,}000333$.
Viiden samanvärisen pallon todennäköisyys on $P_M + P_P = \frac{253}{3003} \approx 0{,}084249$.

Vastaus: Ainakin yksi on punainen todennäköisyydellä 0,9161. Kaikki ovat samanvärisiä todennäköisyydellä 0,0842.

9. Olkoot hotellikustannukset $100h$ ja matkakustannukset $100m$. Muutosten jälkeen hotellikustannukset ovat $95h$ ja matkakustannukset $118m$. Paketin hinnan samuudesta saadaan yhtälö $95h + 118m = 100h + 100m$, josta seuraa $h = \frac{18}{5}m$. Kysytty prosenttiluku on $100 \cdot \dfrac{100m}{100h + 100m} = \dfrac{100m}{\frac{18}{5}m + m} = \frac{500}{23} \approx 21{,}7391$.

Vastaus: 21,7 %.

10. Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ derivaatta on $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ehdosta $f(0) = -2$ seuraa, että $d = -2$ ja ehdosta $f'(0) = 0$, että $c = 0$. Funktio on nyt $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2$ ja derivaatta $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Ehdosta $f'(2) = 0$ saadaan yhtälö $12a + 4b = 0$ ja ehdosta $f(2) = 1$ yhtälö $8a + 4b = 3$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $4a = -3$ eli $a = -\frac{3}{4}$ ja edelleen $b = -3a = \frac{9}{4}$.

Vastaus: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$, $d = -2$.

11. Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}01p = 1{,}0175$, kun korko $p = 1{,}750$. Talletuksen alkamisen jälkeen tilillä on rahaa ensimmäisen vuoden lopussa $700q$ euroa, toisen vuoden lopussa $700(q + q^2)$ euroa, kolmannen vuoden lopussa $700(q + q^2 + q^3)$ euroa ja yleisesti n:nen vuoden lopussa $700(q + q^2 + ... + q^n)$ euroa eli $S_n = 700q\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ euroa. Vuonna 2010 on $n = 5$ ja $S_5 = 700 \cdot 1{,}0175 \cdot \dfrac{1{,}0175^5 - 1}{0{,}0175} \approx 3688{,}094$ (euroa). Jälkimmäisen kysymyksen vastaus saadaan yhtälöstä $S_n = 700 \cdot 1{,}0175 \cdot \dfrac{1{,}0175^n - 1}{0{,}0175} = 12\,000$ eli $1{,}0175^n = \dfrac{120}{7} \cdot \dfrac{0{,}0175}{1{,}0175} + 1$. Ottamalla logaritmit saadaan $n \approx \dfrac{\ln 1{,}294840}{\ln 1{,}0175} \approx 14{,}89$. Vuosia kuluu siis 15, jolloin ollaan vuoden 2020 lopussa.

Vastaus: Vuoden 2010 lopussa rahaa on 3688,09 euroa ja vuoden 2020 lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa.

12. Jos lieriön pohjan säde on r ja kuution särmä x, on lieriössä olevan vesimäärän tilavuus $f(x) = \pi r^2 x - x^3$. Tämän derivaatta $f'(x) = \pi r^2 - 3x^2$. Derivaatta häviää, kun $3x^2 = \pi r^2$ eli $(x > 0)$ kun $x = r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$. Koska $f'(x) > 0$, kun $0 < x < r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ ja $f'(x) < 0$,kun $x > r\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, antaa derivaatan nollakohta funktion suurimman arvon. Arvolla $r = 1{,}75$ m on $r\sqrt{\frac{\pi}{3}} \approx 1{,}791$ m.

Vastaus: Veden syvyys on 1,8 m.

13. Funktio $f(x) = x^3 - 2x$ on kuutioparaabeli, joka leikkaa x-akselia, kun $x = 0$ tai $x = \pm\sqrt{2}$. Derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 2 = 0$, kun $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, joten $f(x)$:llä on lokaali maksimi $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1{,}09$ pisteessä $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja lokaali minimi $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \approx -1{,}09$ pisteessä $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Funktio $g(x) = -x + 3$ on laskeva suora, joka kulkee pisteiden $(0, 3)$ ja $(3, 0)$ kautta. Erityisesti $f(\sqrt{2}) < g(\sqrt{2})$, $f(3) > g(3)$ ja $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,) < g(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,)$. Yhtälöllä $f(x) = g(x)$ eli $h(x) = 0$, missä $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x - 3$, on funktioiden kulun perusteella tasan yksi juuri x_0, $\sqrt{2} < x_0 < 3$. Haarukoimalla saadaan $h(1{,}6) \approx -0{,}50 < 0$ ja $h(1{,}7) \approx 0{,}21 > 0$ sekä $h(1{,}65) \approx -0{,}16 < 0$. Tämän perusteella $1{,}65 < x_0 < 1{,}7$, joten yhden desimaalin tarkkuudella juuri $x_0 = 1{,}7$.

14. Ennen 1.1.2005 oli lähdeverotettu korko $p_1 = 0{,}71 \cdot 1{,}5 = 1{,}065$ ja korkotekijä $q_1 = 1+0{,}01p_1 = 1{,}01065$. 1.1.2005 jälkeen oli lähdeverotettu korko $p_2 = 0{,}72 \cdot 1{,}5 = 1{,}08$ ja korkotekijä $q_2 = 1+0{,}01p_2 = 1{,}0108$. Liisan 1000 euron talletus oli korkoineen 1.1.2005 $1000q_1^3$ ja kaksi vuotta myöhemmin eli viisi vuotta talletuksen alusta $1000q_2^2q_1^3 \approx 1054{,}709$ euroa. Talletuksen reaaliarvon muutoskerroin on $\dfrac{1548}{1632}q_2^2q_1^3 \approx 1{,}000423$, joten reaaliarvo on kasvanut 0,0423 %.

Vastaus: Talletus on korkoineen 1054,71 euroa. Sen reaaliarvo on kasvanut 0,0423 %.

15. A) Todennäköisyys, että lukion opiskelija opiskelee espanjaa on $p = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$. Todennäköisyys, että ryhmästä n opiskelee espanjaa on $P_n = \binom{32}{n}p^n(1-p)^{32-n}$.
Todennäköisyys, että ryhmästä 12 opiskelee espanjaa on $P_{12} \approx 0{,}01066$.
Todennäköisyys, että ryhmästä korkeintaan kolme opiskelee espanjaa on vastaavasti $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \approx 0{,}09309$.

Approksimoidaan binomijakaumaa normaalijakaumalla. Nyt $n = 32$ ja $p = \frac{1}{5}$, joten keskiarvo $\mu = np = 6{,}4$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 2{,}2627$. Normaalijakauma on siis $N(6{,}4;\, 2{,}2627)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0, 1)$ muunnoksella $z = \dfrac{x - 6{,}4}{2{,}2627}$, $z_0 = \dfrac{12{,}5 - 6{,}4}{2{,}2627} \approx 2{,}70$. Kysytty todennäköisyys on $1 - \Phi(z_0) = 0{,}0035$ eli 0,35 %.

15. B) Suunnikkaan paikkavektorit ovat $\overline{OA} = -3\overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = (-3+3)\overline{i} + (7+2)\overline{j} = 9\overline{j}$, $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{AD} = \overline{i} + (9+5)\overline{j} = \overline{i} + 14\overline{j}$, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = (-3+1)\overline{i} + (7+5)\overline{j} = -2\overline{i} + 12\overline{j}$.

Lävistäjävektori $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = 4\overline{i} + 7\overline{j}$ ja $|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$. Lävistäjävektori $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = 2\overline{i} - 3\overline{j}$ ja $|\overline{DB}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Lävistäjävektorien väliselle kulmalle α saadaan $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{DB}}{|\overline{AC}||\overline{BD}|} = \dfrac{8 - 21}{\sqrt{65}\sqrt{13}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \approx -0{,}447214$. Tästä saadaan $\alpha \approx 116{,}6^{\circ}$.