



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. a) Sievennä $\frac{a^2}{3} - \left(\frac{-a}{3}\right)^2$.
b) Ratkaise epäyhtälö $(x - 3)^2 > (x - 1)(x + 1)$.
c) Määritä suorien $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ja $3x - 2y + 3 = 0$ leikkauspiste.
2. a) Laske $\int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$.
b) Ratkaise yhtälö $(e^x)^3 = e^{x^2}$.
c) Minkä funktion integraalifunktio on $\frac{1}{2} \cos(2x)$?
3. a) Määritä vektoreiden $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ ja $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ summavektori ja summavektorin suuntainen yksikkövektori.
b) Kuinka monta prosenttia suurempi on neliön ympäri piirretyn ympyrän kehän pituus kuin neliön piirin pituus? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.
4. Neljännen asteen polynomilla $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 7$ ja sen derivaatalla on yhteinen nollakohta. Määritä tämä yhteinen nollakohta.
5. a) Ratkaise yhtälö $\lg x + \lg(x + 30) = 3$, missä \lg on 10-kantainen logaritmi.
b) Tutki, onko funktio $f(x) = \ln(x + 1) - \ln x$, $x > 0$, monotoninen.
6. Tehdas valmistaa hehkulamppuja siten, että kone A valmistaa 60 prosenttia, kone B 30 prosenttia ja kone C 10 prosenttia hehkulamppuista. Koneen A viallisten hehkulamppujen määrä on 2 prosenttia, koneen B 3 prosenttia ja koneen C 4 prosenttia.
a) Mikä on todennäköisyys, että tehtaan valmistama lamppu on viallinen?
b) Tehtaan valmistama viallinen lamppu valitaan umpimähkään. Millä todennäköisyydellä se on koneen C valmistama?
7. Paraabelin $y = x^2$ pisteeseen (x_0, y_0) , $x_0 \in]0, 1]$, piirretty tangentti, x -akseli ja suora $x = 1$ muodostavat kolmion. Millä arvolla x_0 tämä kolmio on pinta-alaltaan suurin?
8. Taso T kulkee pisteiden $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ ja $C = (1, 2, 3)$ kautta. Muodosta tason yhtälö muodossa $ax + by + cz + d = 0$.
9. Määritä käyrien $y = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ ja $y = \sin x$ yhteiset pisteet ($x \in \mathbb{R}$). Anna koordinaattien tarkat arvot. Laske kahden peräkkäisen leikkauspisteen välisten kaarien rajoittaman alueen pinta-ala.

KÄÄNNÄ!

10. Kun funktion e^{-x} , $x \in [0, a]$, kuvaaja pyörrähtää x -akselin ympäri, syntyy pyöräh-dyskappale, jonka tilavuus on $V(a)$. Määritä $V(a)$ ja $V_\infty = \lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$. Millä a :n arvolla $V(a) = 0,99V_\infty$? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

11. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille

$$\frac{9n^2 + 117n + 34}{3n + 5}$$

on myös positiivinen kokonaisluku.

12. Määritä Newtonin menetelmällä yhtälön $x^3 = x + 2$ juuri kahden desimaalin tarkkuudella. Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri välillä $[1, \infty[$.

13. Miten määritellään sarjan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ n :s osasumma S_n ? Mitä tarkoitetaan sarjan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ suppenemisella? Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ ei suppene, jos $a_i > 0$ kaikilla $i = 1, 2, 3, \dots$.

★14. Vinon pyramidin pohja on neliö, jonka sivu on a . Pyramidin kahden vastakkaisen sivutahkon kulmat pohjan kanssa ovat 30 ja 135 astetta (pyramidin sisäpuolelta mitattuina).

a) Laske pyramidin korkeus. (3 p.)

b) Määritä pyramidin tilavuus. (2 p.)

c) Kahden muun sivutahkon kulmat pohjan kanssa ovat keskenään yhtä suuret. Määritä tämä kulma asteen tarkkuudella. (4 p.)

★15. Suljetulla välillä $[0, 1]$ derivoituvan funktion f derivaatalle pätee $f'(x) \geq 2$ jokaisella $x \in [0, 1]$, ja $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Osoita:

a) $f(x) \geq f(0) + 2x$, kun $x \in [0, 1]$. (3 p.)

b) $f(0) \leq 0$. (3 p.)

c) Funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta välillä $[0, 1]$. (3 p.)