Matematiikan ylioppilaskoe 24.3.2010

Pitkä oppimäärä

Vastaukset

1. **a)** $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{6}{7}$.

b) $2\sqrt{a}$.

c) $x > \frac{3}{2}$.

2. **a)** e.

b) $\sin x + x\cos x$.

c) 32.

3. **a)** $108.2°$.

b) $p = 4$, $q = -2$.

4. 26 %.

5. $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = 2\bar{i}$.

6. **a)** $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{2}{3}$.

7. $2\sqrt{2}$, 1.

8. 3.75 m.

9. $f(x) = 3\tan x - 4x - 1$; $f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\pi}{6}$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x) = -\infty$, $f(-\frac{\pi}{6}) < 0$, $f(\frac{\pi}{6}) < 0$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} f(x) = \infty$.

Siis yksi juuri.

10. Piirit: $p_1 = a + 2\sqrt{b^2 + a^2/4}$, $p_2 = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\begin{aligned} p_1 \le p_2 &\iff 2\sqrt{b^2 + a^2/4} \le b + \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\iff (2\sqrt{b^2 + a^2/4})^2 \le (b + \sqrt{a^2 + b^2})^2 \\ &\iff 4(b^2 + a^2/4) \le b^2 + a^2 + b^2 + 2b\sqrt{a^2 + b^2} \\ &\iff b^2 \le b\sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö on tosi.

11. $a_1 = \frac{3}{2}$, $q_1 = \frac{1}{4}$ tai $a_2 = \frac{1}{2}$, $q_2 = \frac{3}{4}$.

12. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

p alkuluku ja $p > 3 \implies p$ pariton, tekijänä ei ole 3;

luvuissa $p - 1$, p, $p + 1$ yhdessä on tekijänä 3

$\implies$ joko luvussa $p - 1$ tai $p + 1$ on tekijänä 3;

p pariton $\implies p - 1$ ja $p + 1$ parillisia $\implies$ kummassakin tekijänä 2.

Siis luvussa $p^2 - 1$ on tekijöinä 3, 2 ja 2, ts. 12.

13. 1.225.

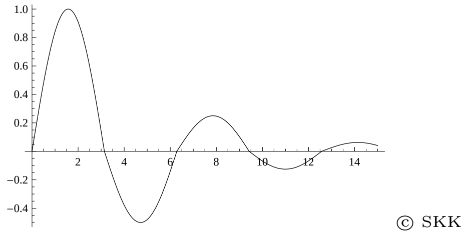
14. **a)** $a_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$.

b) $\dfrac{1}{10^n}$ vähenevä $\implies a_n$ kasvava; a-kohdan mukaan $a_n < 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

d) $0.999\cdots = 1$.

15. **a)**



b) $\frac{3}{2}$.

c) $\displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin x\,dx = 2(-1)^{n-1}$;

$$\int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} 2^{1-k} \cdot 2(-1)^{k-1} = \tfrac{4}{3}[1 - (-\tfrac{1}{2})^n].$$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} f(x)\,dx = \tfrac{4}{3}$.