Lyhyt matematiikka 23.3.2011, ratkaisut:

1. **a)** $4x + (5x - 4) = 12 + 3x \iff 9x - 4 = 12 + 3x \iff 6x = 16 \iff x = \frac{8}{3}$.

b) $x^2 + x - (x^2 - x) = x^2 + x - x^2 + x = 2x$. Kun $x = \frac{1}{2}$, on $2x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

c) Vähentämällä yhtälöparin $x - 2y = 0$, $x - 3y = 1$ yhtälöt toisistaan saadaan $y = -1$, josta $x = 2y = -2$.

Vastaus: **a)** $x = \frac{8}{3}$, **b)** Lauseke on $2x$ ja sen arvo 1, **c)** $x = -2$, $y = -1$.

2. **a)** Annettujen sivujen väliselle kulmalle α pätee $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, josta $\alpha \approx 66{,}42^\circ$. Toinen terävä kulma on $90^\circ - \alpha \approx 23{,}58^\circ$.

b) $(\sqrt{x} - 1)^2 + 2\sqrt{x} = x - 2\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} = x + 1$.

c) Kun $x = 2$ ja $y = 5$, on $|x - y| = |2 - 5| = |-3| = 3$.

Vastaus: **a)** 66° ja 24°. **b)** $x + 1$, **c)** 3.

3. **a)** Kun $x = 2$, on $x^2 - 4ax + 4a^2 = 4 - 8a + 4a^2 = 4(a - 1)^2$. Tämä on nolla, kun $a = 1$.

b) Luvusta a tulee ensin $1{,}2a$ ja sitten $(1 - 0{,}17)1{,}2a$ eli $0{,}996a$ eli $(1 - 0{,}004)a$, joten luku on pienentynyt 0,4 %.

Vastaus: **a)** $a = 1$, **b)** Tulos on 0,4 % pienempi kuin a.

4. **a)** Vastaavan neliön sivun pituus on $\frac{8}{9} \cdot 5 = \frac{40}{9}$. Ympyrän pinta-alalle saadaan arvo $A_E = (\frac{40}{9})^2 = \frac{1600}{81} \approx 19{,}753086$.

b) Ympyrän todellinen pinta-ala on $A = \pi(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}\pi \approx 19{,}634954$. Egyptiläisten arvo on siten liian suuri. Virhe on prosentteina $100 \cdot \dfrac{A_E - A}{A} \approx 0{,}6016$.

Vastaus: **a)** $\frac{1600}{81}$, **b)** 0,6 prosenttia liian suuri.

5. Eräs likiarvo derivaatalle on $f'(0) \approx \dfrac{f(0{,}1) - f(0)}{0{,}1 - 0} = \dfrac{10{,}51 - 10{,}00}{0{,}1} = 5{,}1$.

6. Sivujen mittakaava on pinta-alan mittakaavan neliöjuuri. Jos siis pinta-ala muuttuu suhteessa 1:2, niin sivut muuttuvat suhteessa $1{:}\sqrt{2}$. Uuden kartan mittakaava on $1{:}(\sqrt{2} \cdot 20\,000)$ eli noin 1:28 284.

Vastaus: 1:28 300.

7. Jos arvosanan n, $n = 0, 1, ..., 6$ prosenttiosuus on a_n, on arvosanojen keskiarvo $\overline{x} = 0{,}01 \sum_{n=0}^{6} n \cdot a_n = 3{,}1037$.

Arvosanojen keskihajonta on $s_n = \sqrt{0{,}01 \sum_{n=0}^{6} a_n(n - \overline{x})^2} \approx 1{,}5609$.

Vastaus: Keskiarvo on 3,10 ja keskihajonta 1,56.

8. **a)** Kussakin ruudussa on kaksi värivaihtoehtoa, joten yhdeksässä ruudussa on $2^9 = 512$ eri vaihtoehtoa. Yhden värikombinaation todennäköisyys on $\frac{1}{512} \approx 0{,}001953$.

b) Kolmen ruudun rivissä on $2^3 = 8$ värivaihtoehtoa, joista kuusi ei ole yksiväristä. Todennäköisyys sille, että vaakarivi ei ole yksivärinen on $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Todennäköisyys sille, että mikään kolmesta vaakarivistä ei ole yksivärinen, on $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64} = 0{,}4218785$.

Vastaus: **a)** $\frac{1}{512}$, **b)** $\frac{27}{64}$.

9. $f'(x) = D(-x^3 + x + 2) = -3x^2 + 1$ ja $g'(x) = D(x^3 - x - 2) = 3x^2 - 1$. Nyt $f'(x) > g'(x) \iff -3x^2 + 1 > 3x^2 - 1 \iff 6x^2 < 2 \iff x^2 < \frac{1}{3} \iff -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vastaus: $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Suorakulmion ylemmät kärjet ovat pisteissä $(\pm a,\ 4 - a^2)$. Suorakulmion pinta-ala on $f(a) = 2a(4 - a^2) = 8a - 2a^3$. Sen derivaatta $f'(a) = 8 - 6a^2$ häviää, kun $a^2 = \frac{4}{3}$ eli, koska $a > 0$, kun $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}1547$. Selvästi $f'(a) > 0$, kun $0 < a < \frac{2}{\sqrt{3}}$ ja $f'(a) < 0$, kun $\frac{2}{\sqrt{3}} < a < 2$. Näin ollen pinta-ala saa suurimman arvonsa kohdassa $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Vastaus: Arvolla $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

11. Jos q on radioaktiivisuuden vuorokautinen vähenemiskerroin, on $25q^5 = 16{,}2$, josta $q = \sqrt[5]{\frac{16{,}2}{25}} \approx 0{,}91688528$. Puoliintumisajalle n vrk saadaan yhtälö $q^n = 0{,}5$, josta $n \ln q = \ln 0{,}5 \iff n = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln q} \approx 7{,}9880590$.

Kymmenen vuorokautta aiempi radioaktiivisuus x kBq toteuttaa yhtälön $xq^{10} = 25{,}0$, joten $x = \dfrac{25}{q^{10}} \approx 59{,}537418$.

Vastaus: Puoliintumisaika on 8 vrk. Kymmenen vuorokautta aiemmin radioaktiivisuus oli 59,5 kBq.

12. Vaihdetaan laskua varten x- ja y-akselit keskenään. Tässä uudessa koordinaatistossa $A = (x_A, y_A) = (2\,549\,572,\ 6\,670\,801)$ ja $B = (x_B, y_B) = (2\,554\,955,\ 6\,670\,015)$. Jos havaittu trombi sijaitsee pisteessä $P = (x, y)$, on pisteiden A ja P kautta kulkevan suoran suuntakulma $-(133{,}8^\circ - 90^\circ) = -43{,}8^\circ$ ja kulmakerroin $k_A = \tan(-43{,}8^\circ) \approx -0{,}958965522$. Vastaavasti pisteiden B ja P kautta kulkevan suoran suuntakulma on $360^\circ - 205^\circ - 90^\circ = 65^\circ$ ja kulmakerroin $k_B = \tan 65^\circ \approx 2{,}144506922$. Suoran AP yhtälö on $y - y_A = k_A(x - x_A)$ ja suoran BP yhtälö $y - y_B = k_B(x - x_B)$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan ja sieventämällä saadaan leikkauspisteen P x-koordinaatiksi $x_P = \dfrac{y_A - y_B - k_A x_A + k_B x_B}{k_B - k_A} \approx 2\,553\,545$ ja tästä edelleen pisteen P y-koordinaatiksi $y_P = y_A + k_A(x_P - x_A) \approx 6\,666\,991$. Vaihtamalla x- ja y-koordinaatit saadaan trombin sijainti alkuperäisessä koordinaatistossa.

Vastaus: $(6\,666\,991,\ 2\,553\,545)$.

13. Aritmeettisessa jonossa peräkkäisten termien erotus on aina $d = 12 - 10 = 2$, joten jonon n. termi on $a_n = 10 + 2(n-1) = 8 + 2n$, $n = 1, 2, \ldots$. Geometrisen jonon n. termi on $b_n = 2(\frac{21}{20})^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ On määrättävä pienin luku n, jolle $b_n > a_n$ eli $2(\frac{21}{20})^{n-1} > 8 + 2n \iff 1{,}05^{n-1} - n - 4 > 0$.

Koska arvolla $n = 95$ on $1{,}05^{94} - 95 - 4 < -0{,}8717 < 0$ ja arvolla $n = 96$ on $1{,}05^{95} - 96 - 4 > 3{,}0346 > 0$, pienin luku $n = 96$.

Vastaus: 96. termistä lähtien.

14. **a)** Pääoman tuotto on $0{,}054 \cdot 1{,}8 \cdot 10^6 = 97\,200$ euroa. Tuotosta siirretään pääomaan $0{,}30 \cdot 97\,200 = 29\,160$ euroa ja jaetaan $42\,000$ euroa opiskelustipendeinä. Neljääntoista matkastipendiin jää $97\,200 - 29\,160 - 42\,000 = 26\,040$ euroa. Yhden stipendin suuruudeksi tulee $26\,000/14 = 1860$ euroa.

b) Tuotosta siirretään pääomaan joka vuosi $0{,}30 \cdot 5{,}4\,\% = 1{,}62\,\%$. Viidessä vuodessa pääoma kasvaa määrään $1{,}0162^5 \cdot 1{,}8 \cdot 10^6 \approx 1{,}950601 \cdot 10^6$.

Vastaus: **a)** 1860 euroa, **b)** 1,95 miljoonaan euroon.

15. Vektori $\overline{AB} = (4-1)\overline{i} + (5-2)\overline{j} + (6-3)\overline{k} = 3\overline{i} + 3\overline{j} + 3\overline{k}$. Sen pituus on $\sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$. Vektori $\overline{AC} = (9-1)\overline{i} + (8-2)\overline{j} + (7-3)\overline{k} = 8\overline{i} + 6\overline{j} + 4\overline{k}$. Sen pituus on $\sqrt{8^2 + 6^2 + 4^2} = 2\sqrt{29}$. Kulmalle $\alpha = \angle BAC$ pätee
$\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|AB||AC|} = \dfrac{3 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{29}} = \dfrac{9}{\sqrt{87}} \approx 0{,}964901$, joten $\alpha \approx 15{,}2252^{\mathrm{o}}$.

Vastaus: 15^{o}.