YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

23.3.2011

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x-2}.$$

b) Ratkaise epäyhtälö $x^2 - 2 \leq x$.

c) Ratkaise yhtälö

$$\left|\frac{3}{2}x - 6\right| = 6.$$

2. **a)** Osakkeen arvo oli $35,50$ euroa. Se nousi ensin 12 %, mutta laski seuraavana päivänä 10 %. Kuinka monta prosenttia arvo nousi yhteensä näiden muutosten jälkeen?

b) Suora kulkee pisteiden $(-2,1)$ ja $(5,-3)$ kautta. Määritä sen kulmakerroin.

c) Sievennä $e^{5\ln 2 - \ln 8}$ välivaiheet esittäen.

3. Olkoon $f(x) = xe^{-x^2}$ ja $g(x) = 2e^{-x^2}$.

a) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$.

b) Laske $f'(1)$.

c) Laske integraali $\int_0^1 f(x)\, dx$.

4. Määritä se toisen asteen polynomi, joka saa pisteissä $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$ samat arvot kuin funktio $f(x) = 2^x$.

5. Määritä polynomin $x(x+3)(5-x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1,5]$.

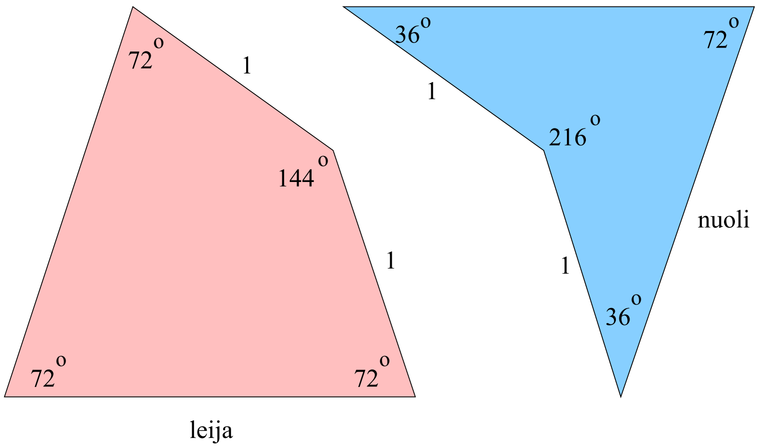
6. Lasten Lotossa rastitaan alle kuvatusta ruudukosta kolme ruutua ja arvonnassa muodostetaan kolmen numeron oikea rivi. Laske todennäköisyydet saada nolla, yksi, kaksi tai kolme oikein. Mikä on näiden todennäköisyyksien summa?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7. Osa Helsingin Keskuskatua muutettiin kävelykaduksi ja päällystettiin Penrosen laatoilla, jotka keksi englantilainen matemaatikko Roger Penrose 1970-luvulla. Niiden avulla taso voidaan laatoittaa äärettömän monella eri tavalla niin, ettei laatoitus ole jaksollinen. Laattoja on kahta eri muotoa, leija ja nuoli. Molemmat ovat nelikulmioita, joiden kulmien suuruudet ja osa sivujen pituuksista on merkitty kuvioon.

a) Laske muiden sivujen pituuksien likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

b) Laske laattojen pinta-alojen likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.



Lähde: http://blogisisko.blogspot.com/2009/11/penrosen-laatat-keskuskadulla.html (17.5.2010)

8. Olkoon $\overline{a} = 4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$. Esitä vektori $\overline{a}$ summana vektoreista $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, joista $\overline{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{b}$ kanssa ja $\overline{v}$ kohtisuorassa vektoria $\overline{b}$ vastaan.

9. Lukujonon termit määritellään rekursiokaavalla

$$a_1 = \frac{5}{4}, \quad a_n = -\frac{3}{4}a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

a) Määritä jonon yleisen termin a_n lauseke.

b) Laske $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

10. Funktio $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Laske käyrien $y = f(x)$, $y = f(x) + \sin x$ ja suorien $x = 0$, $x = 2\pi$ rajaaman alueen pinta-ala.

11. **a)** Määritä sellainen kerroin a, että

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \le -1, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2}, & x > -1, \end{cases}$$

on jatkuva kaikkialla.

b) Onko funktio $f(x)$ tällöin derivoituva kaikkialla?

c) Laske $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

12. Tutki, onko luku $46^{78} + 89^{67}$ jaollinen viidellä.

13. Jaa polynomi $2x^4 - x^3 + x^2 - x - 1$ mahdollisimman matalaa astetta oleviin tekijöihin.

***14.** Funktiota $f(x) = \cos x$ approksimoidaan polynomilla $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

a) Näytä, että $f(x) \geq g(x)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. (3 p.)

b) Ratkaise yhtälö $f(x) = g(x)$. (2 p.)

c) Määritä funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ erotuksen suurin arvo, kun $-\pi \leq x \leq \pi$. (2 p.)

d) Laske funktioiden $f(x)$ ja $g(x)$ kuvaajien väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $-\pi \leq x \leq \pi$. (2 p.)

***15.** Olkoon $f(x) = x^2$. Paraabelin $y = f(x)$ kaarevuutta origossa voidaan tutkia Isaac Newtonin (1642−1727) esittämällä sivuavien ympyröiden (circulum osculans) menetelmällä. Menetelmä perustuu siihen, että jokaisella parametrin $t > 0$ arvolla paraabelin pisteiden $O(0,0)$, $A\left(-t, t^2\right)$ ja $B\left(t, t^2\right)$ kautta kulkee yksikäsitteinen ympyrän kehä.

a) Määritä tämän ympyrän säde $R(t)$ parametrin t avulla lausuttuna. (3 p.)

b) Laske rajaympyrän säde $R_0 = \lim_{t \to 0+} R(t)$. Tätä kutsutaan paraabelin kaarevuussäteeksi origossa. (2 p.)

c) Johda lauseke funktiolle $g(x)$, jonka kuvaaja on rajaympyrän alapuoli. (2 p.)

d) Näytä, että $g''(0) = f''(0) = 1/R_0$. Tämä on paraabelin kaarevuus origossa. (2 p.)