Lyhyt matematiikka 23.3.2012, ratkaisut:

1. **a)** $7x + 3 = 31 \iff 7x = 28 \iff x = 4.$

b) Kun $a = \frac{5}{2}$ ja $b = \frac{7}{3}$, on $\dfrac{2a+3b}{a-b} = \dfrac{2 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{7}{3}}{\frac{5}{2} - \frac{7}{3}} = \dfrac{5+7}{\frac{15}{6} - \frac{14}{6}} = \dfrac{6 \cdot 12}{15 - 14} = 72.$

c) Laskemalla yhtälöparin $2x - y = 1,\ \ x + y = 8$ yhtälöt yhteen saadaan $3x = 9$ eli $x = 3$, josta $y = 2x - 1 = 5$.

Vastaus: **a)** $x = 4$, **b)** 72, **c)** $x = 3$, $y = 5$.

2.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	$\sqrt{x}$	x^3	$\lvert x \rvert$
Kuva	2	4	1	6	5	3

3. **a)** Yhtälö tulee kuudella kerrottuna muotoon $2(7x + \frac{1}{2}) - 3(3x - \frac{1}{3}) = 6 \cdot 2 \iff 14x + 1 - 9x + 1 = 12 \iff 5x = 10 \iff x = 2.$

b) $27^{x-2} = 9^{x/2} \iff (3^3)^{x-2} = (3^2)^{x/2} \iff 3^{3(x-2)} = 3^x \iff 3(x-2) = x \iff x = 3.$

Vastaus: **a)** $x = 2$, **b)** $x = 3$.

4. **a)** $f(2) = 0 \iff \frac{3}{2} \cdot 2 + b = 0 \iff 3 + b = 0 \iff b = -3.$

b) Kuvaaja leikkaa y-akselin, kun $y = f(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 - 3 = -3.$

c) Funktion kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on $\frac{3}{2}$. Kyseiselle terävälle kulmalle α pätee: $\tan\alpha = \frac{3}{2} \implies \alpha \approx 56{,}3099^{\circ}$.

Vastaus: **a)** $b = -3$, **b)** Pisteessä $(0, -3)$, **c)** $56{,}3^{\circ}$.

5. **a)** $f(x) = 0$, kun $x + 3 = 0 \iff x = -3$ tai kun $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2.$

b) Koska $f(x) = (x+3)(x^2-4) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$, on $f'(x) = 3x^2 + 6x - 4$.

c) $f'(x) = 0$, kun $x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+48}}{6} = -1 \pm \sqrt{\dfrac{7}{3}}.$

Vastaus: **a)** $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$, **b)** $3x^2 + 6x - 4$, **c)** $x = -1 \pm \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

6. Koska $\angle ABC = 50^{\circ}$ ja $AB = 30$ m, on joen leveys $AC = 30 \tan 50^{\circ} \approx 35{,}7526$ (m).
Vastaus: 36 metriä.

7. Uusien viestien saajien määrä kaksinkertaistuu aina 10 minuutin välein. Sähköpostin saajia on 10 minuutin kuluttua $2 + 2^2$, 20 minuutin $2 + 2^2 + 2^3$ ja lopulta $10n$ minuutin kuluttua $2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n+1} = 2 \cdot \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2} = 2(2^{n+1} - 1)$. Tästä saadaan ehdoksi $2(2^{n+1} - 1) \geq 20\,000 \iff 2^{n+1} \geq 10\,001 \iff n + 1 \geq \dfrac{\ln 10\,001}{\ln 2} \approx 13{,}2879$. Siis $n \geq 12{,}28$ eli $n = 13$. Aikaa on kulunut $13 \cdot 10$ min eli 130 min.

Vastaus: 2h 10 min.

8. Hinta on vuoden päästä euroina $1{,}025 \cdot 45$, kahden vuoden päästä $1{,}025^2 \cdot 45$ ja kymmenen vuoden päästä $1{,}025^{10} \cdot 45 \approx 57{,}6038$.

Vastaus: 57,60 euroa.

9. Alimman särmiön tilavuus on $V_1 = s^2h = 10\,000$ (m^3), missä h on korkeus ja s pohjasärmän pituus. Sen päällä olevan toisen särmiön pohjasärmän pituus on $0{,}9s$ ja tilavuus $V_2 = (0{,}9s)^2h = 0{,}81s^2h = 0{,}81V_1$. Kolmannen särmiön pohjasärmän pituus on $(0{,}9)^2s$ ja tilavuus $V_3 = ((0{,}9)^2s)^2h = (0{,}81)^2s^2h = (0{,}81)^2V_1$. Neljännen särmiön pohjasärmän pituus on $(0{,}9)^3s$ ja tilavuus $V_4 = ((0{,}9)^3s)^2h = (0{,}81)^3s^2h = (0{,}81)^3V_1$. Näin jatkamalla nähdään, että särmiöiden tilavuudet muodostavat geometrisen jonon, missä n:nnen särmiön tilavuus on $V_n = (0{,}81)^{n-1}V_1$.
Koko porraspyramidin tilavuus on $(1 + 0{,}81 + 0{,}81^2 + 0{,}81^3 + ... + 0{,}81^{99})V_1 = V_1\dfrac{1-0{,}81^{100}}{1-0{,}81} \approx 5{,}263158V_1$ eli on noin $52\,632$ m^3.

Vastaus: $52\,600$ m^3.

10. **a)** Sendain järistyksessä vapautuneelle energialle E pätee kaavan mukaan
$\lg E = 1{,}44 \cdot 9{,}0 + 5{,}24 = 18{,}2$, joten $E = 10^{18{,}2} \approx 1{,}584893 \cdot 10^{18}$.

Koben järistyksessä vapautuneelle energialle E_K pätee vastaavasti
$\lg E_K = 1{,}44 \cdot 6{,}8 + 5{,}24 = 15{,}032$, joten $E_K = 10^{15{,}032}$ ($\approx 1{,}076465 \cdot 10^{15}$).
Energioiden suhde on $\dfrac{E}{E_K} = \dfrac{10^{18{,}2}}{10^{15{,}032}} = 10^{3{,}168} \approx 1472{,}31$.

Vastaus: **a)** $E = 1{,}6 \cdot 10^{18}$, **b)** 1500-kertainen.

11. Olkoon x Ascensus-pikarillisten ja y Sursum-pikarillisten määrä. Taikajuomasta tulee lepakon siiville ehto $3x + 4y \geq 20$ ja hämähäkin seitille ehto $2x + y \geq 10$. Lisäksi on $x \geq 0$ ja $y \geq 0$. Suorat $3x + 4y = 20$ ja $2x + y = 10$ leikkaavat pisteessä $(4, 2)$.
Ehdot toteuttavat pisteet sijaitsevat ensimmäisessä koordinaattineljänneksessä pisteiden $O = (0, 0)$, $A = (0, 10)$, $B = (4, 2)$ ja $C = (6\frac{2}{3}, 0)$ määräämän nelikulmion ulkopuolella. On löydettävä se tämän alueen piste, jossa taikajuoma-ainesten hinta $t = 2x + 3y$ saa pienimmän arvonsa.
Mahdollisia pisteitä ovat pisteet A, B ja C. Näissä pisteissä hinnalla on arvot
$t(A) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 10 = 30$, $t(B) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$, $t(C) = 2 \cdot 6\frac{2}{3} + 3 \cdot 0 = 13\frac{1}{3}$.
Tämän perusteella pienin hinta saadaan pisteessä C.

Vastaus: $6\frac{2}{3}$ pikarillista Ascensusta, eikä yhtään Sursumia.

12. **a)** $f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 1 + 2 = 3, f_5 = 2 + 3 = 5, f_6 = 3 + 5 = 8,$
$f_7 = 5 + 8 = 13, f_8 = 8 + 13 = 21, f_9 = 13 + 21 = 34, f_{10} = 21 + 34 = 55$.

b) Jos $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, on $\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Tämän perusteella saadaan arvolla $n = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^1 - (-\phi)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi + \frac{1}{\phi}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 = f_1.$$

Arvolla $n = 2$ saadaan vastaavasti

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^2 - (-\phi)^{-2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^2 - (\frac{1}{\phi})^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = f_2.$$

c) Yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat kohdan a) perusteella

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \text{ ja } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{1}{\phi}.$$

13. **a)** Luovutusvoitto on $42\,000 - 12\,000 - 4\,000 = 26\,000$ (euroa). Siitä maksetaan pääomatuloveroa $0{,}30 \cdot 26\,000 = 7\,800$ (euroa), joten Simeonille jää tässä vaihtoehdossa $42\,000 - 7\,800 = 34\,200$ (euroa).
Simeoni on omistanut tornin yli 10 vuotta, joten hankintameno-olettamassa lasketaan vero euromäärästä $0{,}6 \cdot 42\,000 = 25\,200$. Veron määrä on nyt $0{,}30 \cdot 25\,200 = 7\,560$ (euroa). Simeonille jää tässä vaihtoehdossa $42\,000 - 7\,560 = 34\,440$ (euroa). Tämä on enemmän kuin edellisessä vaihtoehdossa, joten hankintameno-olettama on Simeonille edullisempi vaihtoehto.

b) Yhtä suuren veron tuottavalle myyntihinnalle x euroa saadaan yhtälö
$0{,}30(x - 16\,000) = 0{,}30 \cdot 0{,}6 \cdot x \iff x - 16\,000 = 0{,}6 \cdot x \iff x = 40\,000.$

Vastaus: **a)** Simeonille jää 34 440 euroa, **b)** 40 000 euroa.

14. Keskilämpötila x on normaalijakautunut $N(4{,}0; \sigma)$. Normitettu keskilämpötila
$z = \dfrac{x-4}{\sigma}$ noudattaa jakaumaa $N(0,1)$. Koska $P(2{,}0 \leq x \leq 6{,}0) = 0{,}90$, on
$P(x \leq 6{,}0) = 0{,}95$ eli $\Phi(\dfrac{6-4}{\sigma}) = 0{,}95$. Tästä saadaan $\dfrac{2}{\sigma} \approx 1{,}645 \Longrightarrow \sigma \approx 1{,}216.$

Vastaus: Keskihajonta on 1,2.

15. **a)** Koska $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on yhtälön eräs ratkaisu $2x + 4^\circ = 60^\circ \iff x = 28^\circ$. Toinen ratkaisu on $2x + 4^\circ = 180^\circ - 60^\circ \iff x = 58^\circ$. Molemmat ovat annetulla välillä.

b) Yhtälöllä on kaksi ratkaisujoukkoa. Toinen on
$2x + 4^\circ = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \iff x = 28^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in Z.$
Toinen ratkaisujoukko on
$2x + 4^\circ = 180^\circ - 60^\circ + n \cdot 360^\circ \iff x = 58^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in Z.$

Vastaus: **a)** $x = 28^\circ$ tai $x = 58^\circ$, **b)** $x = 28^\circ + n \cdot 180^\circ$ tai $x = 58^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in Z.$