YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

23.3.2012

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. Ratkaise yhtälöt

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

2. **a)** Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.

b) Laske lausekkeen $\sqrt{6 \cdot (3!) - 6}$ arvo.

c) Sievennä lauseke $\ln \frac{x}{2} + \ln 2.$

d) Sievennä lauseke $\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi).$

e) Laske integraali $\int_0^1 (x+1)\,dx.$

f) Laske funktion $f(x) = 4e^{2x}$ derivaatta kohdassa $x = 0.$

3. Näytä, että pisteet $A = (2,1)$, $B = (4,0)$ ja $C = (5,7)$ ovat suorakulmaisen kolmion kärjissä.

4. Määritä kaikki vektorit $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, joiden pituus on $\sqrt{22}$ ja joiden kohtisuora projektio xy-tasolle on vektori $2\overline{i} + 3\overline{j}$.

5. Määritä funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ suurin arvo, kun $x > 0.$

6. Ringettejoukkueen kolmen hyökkääjän todennäköisyydet tehdä maali rangaistuslaukauksella ovat 65 %, 75 % ja 54 %. Kukin kolmesta hyökkääjästä saa yhden yrityksen.

a) Millä todennäköisyydellä ainakin yksi hyökkääjä tekee maalin?

b) Laske rangaistuslaukausmaalien lukumäärän odotusarvo.

7. Olkoon $t > 0$. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteen $\left(0, \frac{1}{t}\right)$ kautta ja sivuaa x-akselia pisteessä $(t, 0)$.

a) Määritä kertoimet a, b ja c parametrin t avulla lausuttuna.

b) Näytä, että paraabelin ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen pinta-ala ei riipu parametrin t arvosta.

8. Eräässä huippuyliopistossa on $5\,000$ opiskelijaa, joista yksi sairastuu hiihtolomalta palattuaan influenssaan. Virus alkaa levitä kampuksella, ja siihen sairastuneiden opiskelijoiden lukumäärää kuvaa funktio

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0,8t}},$$

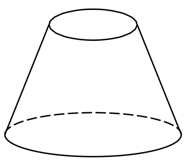
jossa aika $t \geq 0$ lasketaan vuorokausina ensimmäisestä sairastumisesta alkaen.

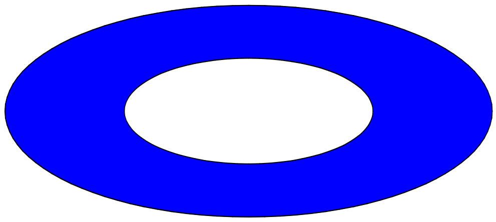
a) Luennot peruutetaan, jos yli $50\ \%$ opiskelijoista on sairaana. Kuinka monen vuorokauden kuluttua ensimmäisestä sairastumisesta näin tapahtuu?

b) Näytä, että $f(t)$ on kasvava funktio, kun $t > 0$.

c) Laske $\lim_{t \to \infty} f(t)$.

9. Suoran ympyräkartion korkeus on $5,0$ cm, ja sen pohjan säde on $2,0$ cm. Kartio katkaistaan niin, että yläreunan säde on $1,0$ cm. Tämän jälkeen katkaistun kartion vaippa maalataan siniseksi ja sitä pyöritetään kyljellään paperilla. Määritä näin saadun sinisen rengasalueen pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella.



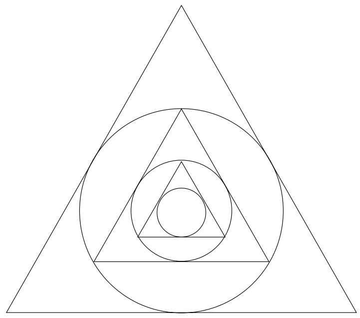


10. Ratkaise yhtälöt

a) $3\tan\frac{x}{2} + 3 = 0$

b) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

11. Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a. Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1, joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2, jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1. Jatkamalla näin saadaan oheisen kuvan mukainen päättymätön jono ympyröitä $Y_1,\ Y_2,\ldots$ Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



12. Tuotteen hinta- ja muut tiedot voidaan tallentaa viivakoodiin (UPC = Universal Product Code). Numeerisessa muodossa viivakoodi on lukujono $(d_1, d_2, \ldots, d_{12})$, jossa kukin $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Viimeinen luku d_{12} on tarkistusmerkki, joka määräytyy ehdosta

$$3(d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

a) Tuotteen viivakoodi on $(1, 4, 2, 6, 8, 2, 5, 9, 0, 3, 2, d_{12})$. Mikä on tarkistusmerkki d_{12}?

b) Näytä, että viivakoodi $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$ on virheellinen.

c) Määritä b-kohdan oikea koodi, kun tiedetään, että virhe on kolmannessa merkissä.

9 87654 32109 8

Esimerkki viivakoodista
<http://en.wikipedia.org/wiki/Barcode>. Luettu 29.3.2011.

13. Funktioiden $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3\cos x$ kuvaajilla on kolme leikkauspistettä. Laske niiden koordinaateille kaksidesimaaliset likiarvot valitsemallasi numeerisella menetelmällä.

***14.** Hyperbolinen kosini $\cosh x$ ja hyperbolinen sini $\sinh x$ määritellään kaavoilla

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{ja} \quad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

kun $x \in \mathbf{R}$.

a) Näytä, että $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. (2 p.)

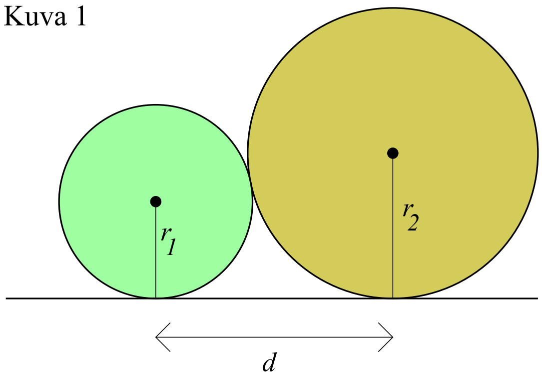
b) Näytä, että $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$. (2 p.)

c) Näytä, että funktiolla $\sinh x$ on käänteisfunktio, ja määritä sen lauseke logaritmin avulla lausuttuna. (3 p.)

d) Mikä on c-kohdan käänteisfunktion määrittelyjoukko? (2 p.)

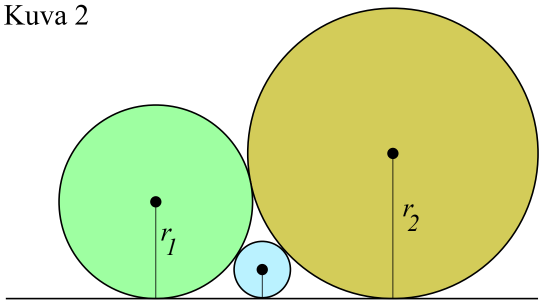
***15.** **a)** Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ja x-akselia kuvan 1 mukaisesti. Määritä ympyröiden keskipisteiden vaakasuora etäisyys d niiden säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 1



b) Kolme ympyrää sivuaa toisiaan ja x-akselia kuvan 2 mukaisesti. Määritä keskimmäisen ympyrän säde r_3 kahden reunimmaisen ympyrän säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 2



c) Todista René Descartesin (1596−1650) keksimä b-kohdan ympyröihin liittyvä kaava

$$(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2),$$

jossa $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, 3$. (3 p.)