Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 20.3.2013
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden ja sisältöjen luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

1. a) $2(x+4)-3(x-3)=0 \Leftrightarrow 2x+8-3x+9=0 \Leftrightarrow -x=-17 \Leftrightarrow x=17.$

b) Keskiarvo on $\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{5}{6}}{2}=\frac{13}{12}.$

c) $\dfrac{3a-6a^2}{3a}=\dfrac{3a(1-2a)}{3a}=1-2a.$

2. a) $4x+17>2-x \Leftrightarrow 5x>-15 \Leftrightarrow x>-3.$

b) $x^2+14x=-49 \Leftrightarrow x^2+14x+49=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-14\pm\sqrt{14^2-4\cdot 49}}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7.$

c) Suoran kulmakerroin on $k=\frac{3}{2}$ ja yhtälö $y=\frac{3}{2}x.$ Piste (48,75) ei toteuta suoran yhtälöä, koska $\frac{3}{2}\cdot 48=72\neq 75.$ Suora ei kulje tämän pisteen kautta.

3. a) $f(x) = x(x+2) - 5 = x^2 + 2x - 5$, joten $f'(x) = 2x + 2$ ja $f'(1) = 4$.

b) $5^{3x-1} = 25^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = \left(5^2\right)^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 5^x \Leftrightarrow 3x - 1 = x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

4. Alkuosan hinta on $21{,}90$ €, keskiosan $28{,}20 \text{ €} - 21{,}90 \text{ €} = 6{,}30$ € ja loppuosan $33{,}50 \text{ €} - 28{,}20 \text{ €} = 5{,}30$ €. Alpo maksaa $\frac{1}{3} \cdot 21{,}90 \text{ €} = 7{,}30$ €, Sanna maksaa $7{,}30 \text{ €} + \frac{1}{2} \cdot 6{,}30 \text{ €} = 10{,}45$ € ja Pauli maksaa $10{,}45 \text{ €} + 5{,}30 \text{ €} = 15{,}75$ €.

5. Olkoon kysytty etäisyys x. Yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{39}{x} = \frac{26}{50 - x} \Leftrightarrow 1950 - 39x = 26x \Leftrightarrow 65x = 1950 \Leftrightarrow x = 30.$$

Kysytty etäisyys on 30 m.

6. Pallojen säde on $r = \frac{6{,}68}{2} = 3{,}34$ cm. Tällöin pallojen tilavuus on yhteensä

$$V_p = 4 \cdot \tfrac{4}{3}\pi \cdot 3{,}34^3 \approx 624{,}2923 \text{ cm}^3.$$

Pakkauksen tilavuus on

$$V_l = \pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}34^2 \cdot 4 \cdot 6{,}68 \approx 936{,}4385 \text{ cm}^3,$$

joten tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_p}{V_l} \approx \frac{624{,}2923}{936{,}4385} \approx 0{,}67.$$

Pallot täyttävät 67 % pakkauksen tilavuudesta.

7. Derivaatta on $f'(x) = 6x^2 + 4x - 10$. Tällöin

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = -\tfrac{5}{3},$$

joista jälkimmäinen ei kuulu välille [0,2]. Lasketaan arvot $f(0) = 5$, $f(1) = -1$ ja $f(2) = 9$. Funktion pienin arvo on -1 ja suurin arvo 9, joten funktio saa kaikki arvot välillä $[-1, 9]$.

8. a) Lukumäärä kasvoi $1460500 - 422500 = 1038000$. Kasvu on prosentteina

$$\frac{1038000}{422500} \cdot 100 \text{ \%} \approx 246 \text{ \%}.$$

b) Yhtälöstä $1460500 \cdot q^4 = 422500$ saadaan $q^4 = \dfrac{422500}{1460500} \approx 0,2892,$ joten

$q \approx \sqrt[4]{0,2892} \approx 0,7333.$ Kysytty vuotuinen vähenemisprosentti on 26,7.

9. a) Jos neliön sivu on $a,$ niin sen piiri on $4a$ ja ala $A_1 = a^2$. Jos ympyrän säde on $r,$ niin sen kehän pituus on $2\pi r$ ja ala $A_2 = \pi r^2$. Siis $4a = 2\pi r,$ josta $a = \dfrac{\pi r}{2}$.

Alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a^2}{\pi r^2} = \frac{\left(\frac{\pi r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,7854,$$

joten neliön ala on 21,5 % pienempi.

b) Alojen suhde on $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{4}{\pi} \approx 1,2732,$ joten ympyrän ala on 27,3 % suurempi.

10. Alkeistapauksista muodostuu 6 x 6-ruudukko.

a) Ruudukon perusteella suotuisia tapauksia ovat

(2,6), (3,5), (3,6), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) ja (6,6).

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12} \approx 0,42.$

b) Ruudukon perusteella suotuisia tapauksia ovat

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1) ja (6,1).

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{11}{36} \approx 0,31.$

11. a) Kahden peräkkäisen termin erotus on $d = \frac{12}{5} - 2 = \frac{2}{5}$, joten

$$a_{100} = a_1 + 99d = 2 + 99 \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{208}{5}.$$

Summa on

$$100 \cdot \frac{2 + \frac{208}{5}}{2} = 2180.$$

b) Suhdeluku $q = \dfrac{\frac{12}{5}}{2} = \frac{6}{5} = 1,2,$ joten summa on

$$\frac{2\left(1 - 1,2^{100}\right)}{1 - 1,2} \approx 828179735 \approx 828 \cdot 10^6.$$

12. Jos X noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(52;\ 1{,}25)$, niin normitettu satunnaismuuttuja $Z = \dfrac{X-52}{1{,}25}$ noudattaa normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0{,}1)$. Tällöin

$$P(X<50) = P\left(Z < \frac{50-52}{1{,}25}\right) = \Phi(-1{,}6) \ = 1-\Phi(1{,}6) \approx 1-0{,}9452$$
$$= 0{,}0548 \approx 5{,}5\ \%.$$

13. a) Yhtälöstä $2300\cdot e^{40a} = 2{,}6\cdot 10^9$ saadaan $e^{40a} = \dfrac{2{,}6\cdot 10^9}{2300} \approx 1{,}1304\cdot 10^6$ ja

edelleen $a \approx \dfrac{\ln(1{,}1304\cdot 10^6)}{40} \approx 0{,}35.$

b) Lukumäärä kaksinkertaistuu ajassa t, jos $e^{at} = 2.$ Tästä saadaan

$$t = \frac{\ln 2}{a} \approx 2{,}0,$$

joten Mooren laki pätee.

14. a) Jos valmistusmäärä on x, niin kokonaiskustannukset ovat $12{,}30x + 98\,000$ €.

b) Tuotto on $0{,}75x\cdot 17{,}99 + 0{,}25x\cdot 14{,}00 \ = 16{,}9925x$, joten voitto on $16{,}9925x - (12{,}30x + 98000) = 4{,}6925x - 98000.$

c) Kustannukset saadaan katettua, kun

$$4{,}6925x - 98000 \geq 0 \ \Leftrightarrow x \geq \frac{98000}{4{,}6925} \approx 20884{,}4.$$

Koteloita täytyy valmistaa vähintään 20 885 kappaletta.

15. a) Kuvaajan perusteella funktion $A\sin(bx)$ maksimiarvo on noin 3. Koska funktion $\sin(bx)$ maksimiarvo on 1, niin $A \approx 3$.

b) Kuvaajan perusteella funktion $A\sin(bx)$ ensimmäinen positiivinen maksimikohta on $x \approx 180^\circ$. Sen vuoksi $b\cdot 180^\circ \approx 90^\circ \Leftrightarrow b \approx 0{,}5.$

c) Kuvaajan perusteella $L \approx 720^\circ$.