YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

20.3.2013

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $(x-4)^2 = (x-4)(x+4)$.

b) Ratkaise epäyhtälö $\frac{3}{5}x - \frac{7}{10} < -\frac{2}{15}x$.

c) Suora kulkee pisteiden $(1,7)$ ja $(2,4)$ kautta. Missä pisteessä se leikkaa x-akselin?

2. **a)** Laske funktion $f(x) = \sin(3x)$ derivaatan tarkka arvo kohdassa $x = \frac{\pi}{9}$.

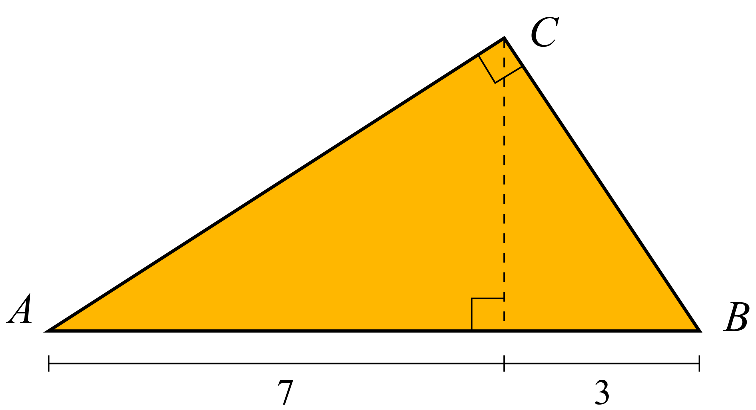
b) Määritä vektoreiden $\overline{a} = 4\overline{i} + \overline{j} - 7\overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k}$ erotusvektori $\overline{a} - \overline{b}$ sekä erotusvektorin pituus.

c) Kulma α toteuttaa ehdot $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ja $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Määritä luvun $\cos\alpha$ tarkka arvo.

3. **a)** Laske lausekkeen $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ tarkka arvo, kun positiiviset luvut a ja b ovat toistensa käänteislukuja ja lukujen a ja b keskiarvo on 2.

b) Sievennä lauseke $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$.

4. Laske oheisen kuvan suorakulmaisen kolmion ABC pinta-alan tarkka arvo.



5. Määritä funktion $(x^2 - x - 5)e^{-x}$ suurin ja pienin arvo, kun $x \geq 0$.

6. Veriryhmien B ja O esiintymistodennäköisyydet ovat P(B) = $0{,}17$ ja P(O) = $0{,}33$. Vampyyri puree kahtatoista ihmistä. Laske todennäköisyys sille, että

a) joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O.

b) joukossa on kolme tai neljä ihmistä, joiden veriryhmä on B.

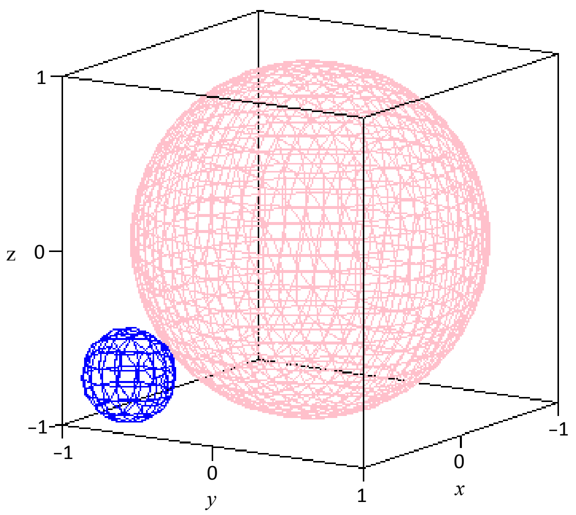
7. Pisteiden $A(2,0,1)$ ja $B(3,1,3)$ yhdysjanan keskipisteen kautta asetetaan taso, joka on kohtisuorassa yhdysjanaa vastaan. Missä pisteessä tämä taso leikkaa y-akselin?

8. **a)** Määritä käyrien $y = 12x^3 - 36x$ ja $y = -12x^2 + 36x$ leikkauspisteet.

b) Näiden käyrien väliin jää kaksi rajoitettua aluetta. Laske niiden pinta-alojen summa.

9. Ratkaise yhtälö $\cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

10. Oheisen kuution särmän pituus on 2. Sen sisällä on vaaleanpunainen pallo, joka sivuaa jokaista kuution tahkoa. Kuution yhdessä kulmassa on pienempi sininen pallo, joka sivuaa suurta palloa ja kolmea kuution tahkoa kuvion mukaisesti. Laske sinisen pallon säteen tarkka arvo.



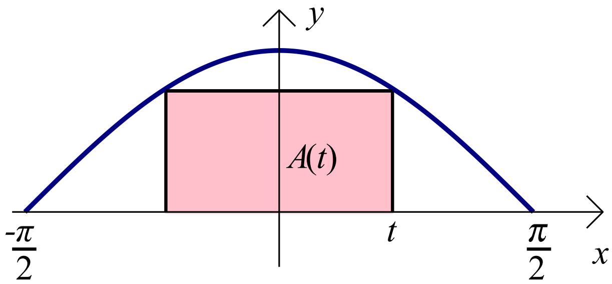
11. Millä muuttujan x arvolla jono $\ln 2$, $\ln(2^x-2)$, $\ln(2^x+2)$ on aritmeettinen?

12. Suorakulmion yksi sivu on x-akselilla ja kaksi kärkeä käyrällä $y=\cos x$, kun $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

a) Muodosta lauseke suorakulmion pinta-alalle $A(t)$ kuvioon merkityn muuttujan $0<t<\frac{\pi}{2}$ funktiona.

b) Ratkaise funktion $A(t)$ derivaatan nollakohta kahden desimaalin tarkkuudella käyttämällä valitsemaasi numeerista menetelmää.

c) Määritä suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-alan likiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.



13. Konnektiivin □ totuustaulu on

A	B	$A \square B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

a) Muodosta lauseen $A \square (A \square B)$ totuustaulu.

b) Esitä lause $A \square (A \square B)$ sellaisessa muodossa, jossa esiintyy ainoastaan konnektiiveja $\neg$, $\vee$ tai $\wedge$.

***14.** Olkoon $P(x)=x^2+x-2$.

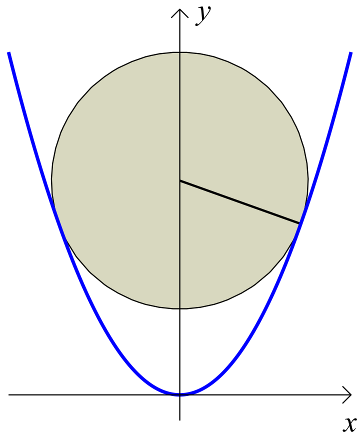
a) Jaa $P(x)$ ensimmäisen asteen tekijöihin. (2 p.)

b) Määritä sellaiset vakiot A ja B, että $\frac{1}{P(x)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$ kaikilla $x\geq 2$. (2 p.)

c) Määritä funktion $\frac{1}{P(x)}$ integraalifunktiot, kun $x\geq 2$. (2 p.)

d) Laske epäoleellinen integraali $\int_2^\infty \frac{1}{P(x)}\,dx$. (3 p.)

***15.** **a)** Ympyrä, jonka säde on $r > \frac{1}{2}$, asetetaan paraabelin $y = x^2$ sisäpuolelle alla olevan kuvan mukaisesti. Näytä, että ympyrän keskipisteen y-koordinaatti on $r^2 + \frac{1}{4}$. (3 p.)



b) Ympyrä C_1 saadaan valitsemalla a-kohdassa $r = r_1 = 1$. Sitä sivuamaan asetetaan toinen ympyrä C_2, joka sivuaa myös paraabelia. Jatkamalla näin saadaan alla olevan kuvan mukainen jono ympyröitä C_1, C_2, C_3, … Määritä ympyrän C_2 säde r_2. (2 p.)

c) Osoita, että peräkkäisten ympyröiden C_n ja C_{n+1} säteet r_n ja r_{n+1} toteuttavat rekursiokaavan $(r_{n+1})^2 - r_{n+1} = (r_n)^2 + r_n$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (2 p.)

d) Osoita c-kohdan avulla, että $r_{n+1} = r_n + 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (2 p.)