MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 20.3.2013
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden ja sisältöjen luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

1. a) $(x-4)^2=(x-4)(x+4) \Leftrightarrow x^2-8x+16=x^2-16 \Leftrightarrow -8x=-32 \Leftrightarrow x=4.$

b) $\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}<-\frac{2}{15}x \Leftrightarrow 18x-21<-4x \Leftrightarrow 22x<21 \Leftrightarrow x<\frac{21}{22}.$

c) Suoran yhtälö on $y-7=\dfrac{4-7}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow 3x+y-10=0.$ Leikkauspisteessä

$y=0,$ joten $3x-10=0.$ Siis $x=\frac{10}{3}.$ Leikkauspiste on $\left(\frac{10}{3},0\right).$

2. a) $f'(x)=3\cos(3x),$ joten $f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=3\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$

b) $\overline{a}-\overline{b}=(4-2)\overline{i}+(1+3)\overline{j}+(-7+5)\overline{k}=2\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k},$ joten

$\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}.$

c) Kun $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$ niin $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$

3. a) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b = (a+b)+2\sqrt{ab}$. Koska $\frac{a+b}{2}=2,$ niin $a+b=4$.

Koska $a=\frac{1}{b}$, niin $ab=1$. Siis $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = 4+2\cdot 1 = 6$.

b) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right) = x^1 - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^1 = x+y.$

4. Olkoot korkeusjanan kantapiste D ja $CD = h.$ Kolmiot ADC ja CDB ovat yhdenmuotoiset, joten

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}.$$

Siis

$$\frac{7}{h} = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h^2 = 21.$$

Koska $h > 0,$ niin $h = \sqrt{21}.$ Pinta-ala on

$$\frac{AB\cdot DC}{2} = \frac{10h}{2} = 5h = 5\sqrt{21}.$$

5. Merkitään $f(x) = \left(x^2-x-5\right)e^{-x}$. Derivaatan

$$f'(x) = \left(x^2-x-5\right)e^{-x}(-1) + e^{-x}(2x-1) = \left(-x^2+3x+4\right)e^{-x}$$

nollakohdat saadaan yhtälöstä $-x^2+3x+4=0 \Leftrightarrow x=4$ tai $x=-1$. Nollakohta $x=-1$ ei kuulu alueeseen $x \geq 0$. Koska $f(0)=-5,$ $f(4)=\frac{7}{e^4}\approx 0{,}1282$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0,$ niin funktion pienin arvo on -5 ja suurin arvo on $\frac{7}{e^4}$.

6. a) Komplementtien todennäköisyydet ovat

P(ei B) $= 1-0{,}17 = 0{,}83$ ja

P(ei O) $= 1-0{,}33 = 0{,}67.$

Tällöin

P(enintään 9 O:ta) = 1 – P(10, 11 tai 12 O:ta)

$$= 1-\left[\binom{12}{10}\cdot 0{,}33^{10}\cdot 0{,}67^2 + \binom{12}{11}\cdot 0{,}33^{11}\cdot 0{,}67 + 0{,}33^{12}\right]$$

$$\approx 0{,}9995.$$

b) $P(\text{3 tai 4 B:tä}) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}17^3 \cdot 0{,}83^9 + \binom{12}{4} \cdot 0{,}17^4 \cdot 0{,}83^8 \approx 0{,}30.$

7. Yhdysjanan keskipiste on $M = \left(\frac{2+3}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$. Tason normaalivektori on

$$\overrightarrow{AB} = (3-2)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k},$$

joten tason yhtälö on muotoa $x + y + 2z + d = 0.$ Taso kulkee pisteen M kautta, joten $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7.$ Sijoittamalla yhtälöön $x = 0$ ja $z = 0$, saadaan $y = 7.$ Leikkauspiste on $(0,7,0)$.

8. a) Leikkauspisteiden x-koordinaatit saadaan yhtälöstä

$$12x^3 - 36x = -12x^2 + 36x \Leftrightarrow 12x^3 + 12x^2 - 72x = 0 \Leftrightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3 \vee x = 2.$$

Sijoittamalla nämä arvot saadaan leikkauspisteiksi $(-3,-216),\ (0,0)$ ja $(2,24)$.

b) Merkitään $f(x) = 12x^3 - 36x$ ja $g(x) = -12x^2 + 36x.$ Koska $f(x) \geq g(x)$ välillä $-3 \leq x \leq 0$ ja $g(x) \geq f(x)$ välillä $0 \leq x \leq 2,$ niin pinta-ala on

$$\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))dx$$

$$= \int_{-3}^{0} (12x^3 + 12x^2 - 72x)dx + \int_{0}^{2} (-12x^3 - 12x^2 + 72x)dx$$

$$= \Big/_{-3}^{0} \left(3x^4 + 4x^3 - 36x^2\right) + \Big/_{0}^{2} \left(-3x^4 - 4x^3 + 36x^2\right) = 253.$$

9. $\cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = -\cos(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(2x + \pi)$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm(2x + \pi) + n2\pi \Leftrightarrow x = (2n+1)\pi \vee 5x = (2n-1)\pi$$

$$\Leftrightarrow x = (2n+1)\pi \vee x = \tfrac{2n-1}{5}\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

10. Kuution poikkileikkaus on suorakulmio, jonka sivuina ovat kaksi kuution vastakkaista särmää ja kahden sivutahkon lävistäjät. Tämän suorakulmion sivujen pituudet ovat 2 ja $2\sqrt{2}$ ja sen lävistäjän pituus on $2\sqrt{3}$. Olkoon pienen pallon säde r ja sen keskipisteen etäisyys kuution kärjestä x.

Yhdenmuotoisuuden nojalla $\frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{1}$, joten $x = r\sqrt{3}$. Summa $1 + r + x = 1 + \left(1+\sqrt{3}\right)r$ on puolet suorakulmion lävistäjän pituudesta, joten $1 + \left(1+\sqrt{3}\right)r = \sqrt{3}$. Pienen pallon säde on $r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

11. Aritmeettisen jonon määritelmän mukaan

$$\ln\left(2^x - 2\right) - \ln 2 = \ln\left(2^x + 2\right) - \ln\left(2^x - 2\right),$$

joten

$$\ln\left(\frac{2^x - 2}{2}\right) = \ln\left(\frac{2^x + 2}{2^x - 2}\right) \Leftrightarrow \frac{2^x - 2}{2} = \frac{2^x + 2}{2^x - 2} \Leftrightarrow$$

$$\left(2^x\right)^2 - 4 \cdot 2^x + 4 = 2 \cdot 2^x + 4$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x = 0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^x - 6\right) = 0.$$

Koska $2^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin $2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$.

12. **a)** Pinta-ala on $A(t) = 2t\cos t$.

b) $A'(t) = -2t\sin t + 2\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t - t\sin t = 0$. Ratkaistaan yhtälö Newtonin menetelmällä. Merkitään $f(t) = \cos t - t\sin t$, jolloin $f'(t) = -2\sin t - t\cos t$. Newtonin menetelmän rekursiokaava on

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\cos t_n - t_n \sin t_n}{-2\sin t_n - t_n \cos t_n},$$

josta iteroimalla alkuarvosta $t_0 = 1$ lähtien saadaan $t_1 \approx 0{,}8645$, $t_2 \approx 0{,}8603$ ja $t_3 \approx t_2$. Ratkaisun kaksidesimaalinen likiarvo on $t \approx 0{,}86$.

c) Lasketaan arvot $A(0) = 0$, $A(\frac{\pi}{2}) = 0$ ja $A(0{,}86) \approx 1{,}1$. Pinta-alan suurin arvo on $1{,}1$.

13. a)

A	B	$A \,\square\, B$	$A \,\square\, (A \,\square\, B)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

b) Koska $A \,\square\, (A \,\square\, B)$ on tosi, jos ja vain jos A ja B ovat tosia, niin se on ekvivalentti lauseen $A \wedge B$ kanssa.

***14. a)** $P(x) = x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$, joten $P(x) = (x+2)(x-1)$. (2 p.)

b) $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ kaikilla $x \geq 2$, joka pätee, kun

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(2 p.)}$$

c) $$\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{3}}{x+2}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x-1| - \tfrac{1}{3}\ln|x+2| + C$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C = \tfrac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2} + C,$$ kun $x \geq 2$. (2 p.)

d) Jos $k > 2$, niin

$$\int_2^k \frac{1}{P(x)}\,dx = \tfrac{1}{3}\Big/_2^k \ln\frac{x-1}{x+2} = \tfrac{1}{3}\left(\ln\frac{k-1}{k+2} - \ln\frac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\ln\left(4 \cdot \frac{k-1}{k+2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}\ln\left(4 \cdot \frac{1-\frac{1}{k}}{1+\frac{2}{k}}\right) \to \tfrac{1}{3}\ln 4,$$ kun $k \to \infty$.

Siis $\int_2^\infty \frac{1}{P(x)}\,dx = \frac{1}{3}\ln 4$. (3 p.)

*15. **a)** Sivuamispisteeseen $\left(t,t^2\right)$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $2t$ ja normaalin yhtälö on $y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$. Normaali leikkaa y-akselin, kun $y=t^2+\frac{1}{2}$. Tämä on ympyrän keskipisteen y-koordinaatti. Ympyrän keskipisteen etäisyys sivuamispisteestä on

$$r=\sqrt{(t-0)^2+(t^2-y)^2}=\sqrt{t^2+\frac{1}{4}},$$

joten $t^2=r^2-\frac{1}{4}$. Siis $y=r^2+\frac{1}{4}$. (3 p.)

b) a-kohdan kaavan mukaan ympyrän C_1 keskipisteen y-koordinaatti on $y_1=\frac{5}{4}$ ja ympyrän C_2 keskipisteen y-koordinaatti on $(r_2)^2+\frac{1}{4}$. Keskipisteiden välinen etäisyys on siis $y_2-y_1={r_2}^2-1$. Toisaalta keskipisteiden etäisyys on säteiden summa $1+r_2$. Näin saadaan yhtälö

$$(r_2)^2-1=1+r_2 \Leftrightarrow (r_2)^2-r_2-2=0 \Leftrightarrow r_2=2 \vee r_2=-1.$$

Säde on positiivinen, joten $r_2=2$. (2 p.)

c) a-kohdan mukaan ympyrän C_n keskipisteen y-koordinaatti on $y_n={r_n}^2+\frac{1}{4}$ ja vastaavasti ympyrän C_{n+1} y-koordinaatti on $y_{n+1}=\left(r_{n+1}\right)^2+\frac{1}{4}$. Keskipisteiden välimatka on siten

$$\left(r_{n+1}\right)^2+\tfrac{1}{4}-(r_n)^2-\tfrac{1}{4}=\left(r_{n+1}\right)^2-(r_n)^2.$$

Toisaalta sama välimatka on r_n+r_{n+1}. Näin saadaan yhtälö

$$\left(r_{n+1}\right)^2-\left(r_n\right)^2=r_n+r_{n+1} \Leftrightarrow \left(r_{n+1}\right)^2-r_{n+1}=\left(r_n\right)^2+r_n. \quad \text{(2 p.)}$$

d) Edellisen kohdan nojalla $\left(r_{n+1}\right)^2-r_{n+1}-\left(r_n\right)^2-r_n=0 \Leftrightarrow$

$$r_{n+1}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\left({r_n}^2+r_n\right)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{(2r_n+1)^2}}{2}=\frac{1\pm(2r_n+1)}{2},$$

josta vain positiivinen ratkaisu $r_{n+1}=r_n+1$ kelpaa. (2 p.)