Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 19.3.2014
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

1. a) $2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$.

b) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b} = a+b = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

c) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x = 3x-3 \Leftrightarrow x = -3$.

2. a) y-akselilla $x = 0$. Tällöin $-5y = 4 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{5}$. Leikkauspiste on $\left(0, -\frac{4}{5}\right)$.

b) $4x^3 = 48 \Leftrightarrow x^3 = \frac{48}{4} = 12$, joten $x = \sqrt[3]{12} \approx 2{,}289$.

c) $2 \cdot 3^x = 162 \Leftrightarrow 3^x = 81 = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$.

3. a) Hypotenuusan pituus on $\sqrt{5,0^2+8,0^2}=\sqrt{89,0}\approx 9,4$ senttimetriä. Toiselle terävälle kulmalle α on voimassa $\tan\alpha=\frac{5}{8}$, joten $\alpha\approx 32^\circ$. Toinen terävä kulma on noin $90^\circ-32^\circ=58^\circ$.

b) Yhtälöstä $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{2}$ saadaan ristiin kertomalla $2x+2y=5x-5y$, joten $-3x=-7y$. Näin ollen $\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{3}$.

4. Olkoon särmän pituus aluksi $2a$, jolloin kuution tilavuus on $V=(2a)^3=8a^3$ ja sen pinta-ala on $A=6(2a)^2=24a^2$. Puolittuneen särmän pituus on a.

a) Uusi tilavuus on $V_u=a^3$. Tilavuuksien suhde on $\dfrac{V_u}{V}=\dfrac{a^3}{8a^3}=\dfrac{1}{8}=0{,}125$, joten $V_u=0{,}125V$ ja tilavuus on pienentynyt 87,5 %.

b) Uusi pinta-ala on $A_u=6a^2$. Pinta-alojen suhde on $\dfrac{A_u}{A}=\dfrac{6a^2}{24a^2}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$, joten pinta-ala on pienentynyt 75 %.

5. Taulukoidaan eri osien tilavuudet, kun kuohuviiniä lisätään x litraa.

	mansikkamehua (l)	kuohuviiniä (l)	yhteensä (l)
sekoitus 1	1,2	2,8	4,0
lisäys	0	x	x
sekoitus 2	1,2	2,8+x	4,0+x

Mansikkamehua pitäisi olla toisessa sekoituksessa $0,2\cdot(4,0+x)$ litraa. Ratkaistaan yhtälö $0,2\cdot(4,0+x)=1,2 \Leftrightarrow 4,0+x=6,0 \Leftrightarrow x=2,0.$ Kuohuviiniä on lisättävä 2,0 litraa.

6. Jos häkissä on k kaniinia ja f fasaania, niin $\begin{cases} k+f=35 \\ 4k+2f=94 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=12 \\ f=23. \end{cases}$

Kaniineja on 12 ja fasaaneja 23.

7. Tukin halkaisija on $2r$ = 20 cm, joten sen säde on r = 10 cm. Vaijerin kunkin suoran osan pituus on $2r$. Kaarevat osat ovat ympyrän kaaria, joiden keskuskulma on 60°. Niiden yhteispituus on koko ympyrän kehän pituus. Koko vaijerin pituus on

$$6\cdot 2r+2\pi r=120+20\pi\approx 183 \text{ senttimetriä.}$$

8. Rahaa on tilillä vaiheen k jälkeen $\left(1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}\right)\cdot 100$ euroa. Tämä on geometrinen summa $100\sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}$, jonka arvo on

$$100\frac{1\cdot(1-3^k)}{1-3}=50\left(3^k-1\right).$$

Tämä ylittää talousarvion silloin, kun $50\left(3^k-1\right)>54{,}1\cdot 10^9$. Näin saadaan ehto $3^k>1{,}082\cdot 10^9+1$, joka toteutuu arvoilla $k>\dfrac{\lg\left(1{,}082\cdot 10^9+1\right)}{\lg 3}\approx 18{,}9$. Ylitys tapahtuu 19. vaiheen jälkeen.

9. Mahdollisia setelijonoja on kuusi erilaista. Niistä suotuisia ovat vain jonot (5,5,10,10) ja (5,10,5,10). Kysytty todennäköisyys on $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

10. a) Funktiolla $f(x)$ on pienin arvo vain silloin, kun $a>0$. Pienin arvo saavutetaan derivaatan $f'(x)$ nollakohdassa. Koska $f'(x)=2ax-4=0$ kohdassa $x=\frac{2}{a}$, niin pienin arvo on $f\left(\frac{2}{a}\right)=8-\frac{4}{a}$. Pienin arvo on nolla, kun $a=\frac{1}{2}$.

b) Ehto voi toteutua vain silloin, kun $b<0$ ja funktion $g(x)$ nollakohdat ovat -2 ja 1. Koska $g(1)=b+4$, niin saadaan ehto $b=-4$. Tällä arvolla myös $g(-2)=0$, joten $b=-4$ on kysytty kerroin.

11. Iterointi:

$x_1=1$
$x_2\approx 3{,}666666667$
$x_3\approx 2{,}667584940$
$x_4\approx 2{,}199974562$
$x_5\approx 2{,}086498753$
$x_6\approx 2{,}080103525$
$x_7\approx 2{,}080083823$
$x_8\approx 2{,}080083823\approx x_7.$

Vastaus on $n=7$.

12. Koska $T = -\lg p,$ niin $p = 10^{-T}.$

a) Koska $p_{alko} = 10^{-3,8} \approx 0,00016$ ja $p_{tapaturma} = 10^{-3,4} \approx 0,00040 > p_{alko},$ niin tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys on suurempi.

b) Koska $p_{loukk} = 10^{-3,2},$ niin loukkaantuneiden lukumäärä on $5,4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3,2} \approx 3400.$

13. a) Tangentin kulmakerroin on $y'(x) = -3x^2 + 2x + 3,$ ja sen ääriarvokohdassa on $y''(x) = -6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$ Kulkukaavion mukaan kyseessä on maksimikohta. Koska $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{27},$ niin kysytty piste on $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right).$

b) Tangentin kulmakerroin on $y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}$ ja tangentin yhtälö

$$y - \frac{29}{27} = \frac{10}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \text{ eli } y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}.$$

14. a) Ennusteen mukaan $y = a(x - 2014) + b.$ Annetuista tiedoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y(2014) = b = 607\,417 \\ y(2018) = 4a + b = 629894, \end{cases} \quad \text{josta} \quad \begin{cases} a = 5619,25 \\ b = 607\,417. \end{cases}$$

b) Asukasluvun kasvu on

$$y(2030) - y(2014) = 16a + b - b = 16a = 89908 \approx 90\,000.$$

c) Piirretty kuvaaja.

15. a) $\tan\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 45^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in \mathbf{Z}.$ Välillä $0^\circ \le \gamma \le 360^\circ$ on kaksi ratkaisua $\gamma = 45^\circ$ ja $\gamma = 225^\circ.$

b) Kuvion perusteella $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ ja $\tan\beta = \frac{1}{2},$ joten $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}$

$= 1.$

Näin ollen $\alpha + \beta = 45^\circ = \gamma.$

Alustava pisteitys

1. **a)**	$2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(2x-1) = 0$	1
	$x = 0 \vee 2x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$	1
	TAI:	
	$2x^2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0$ ja sijoitus ratkaisukaavaan: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-0}}{4}$,	1
	josta $x = \dfrac{1 \pm 1}{4} = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$	1
	Jaettu puolittain x:llä ja saatu vain juuri $\frac{1}{2}$	1
b)	Suora sijoitus: $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = \dfrac{1 - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}}$	1
	Sievennetty: $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$	1
	TAI:	
	Jaettu osoittaja tekijöihin: $\dfrac{a^2 - b^2}{a - b} = \dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b}$	1
	Supistettu, sijoitettu ja saatu: $a + b = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$	1
	Vastaukseksi hyväksytään myös $\frac{6}{4}$	
c)	Nimittäjien poisto: $\dfrac{x}{3} = \dfrac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x = 3(x-1)$,	1
	josta $4x = 3x - 3 \Leftrightarrow x = -3$	1

2. **a)**	y-akselilla $x=0$. Tällöin $-5y=4$,	1
	josta $y=-\frac{4}{5}$, joten leikkauspiste on $\left(0,-\frac{4}{5}\right)$	1
b)	$4x^3=48 \Leftrightarrow x^3=\frac{48}{4}=12$,	1
	josta $x=\sqrt[3]{12}=2,2894...\approx 2,289$	1
	Likiarvossa tarkkuusvirhe	–1
c)	$2\cdot 3^x=162 \Leftrightarrow 3^x=81$	1
	Koska $81=3^4$, saadaan $x=4$.	1
	TAI logaritmeilla**:**	
	$\lg 2+x\lg 3=\lg 162$,	1
	josta $x=\dfrac{\lg 162-\lg 2}{\lg 3}=4$	1

3. **a)**	Olkoot hypotenuusa *c* sekä terävät kulmat α ja β. c $=\sqrt{5,0^2+8,0^2}=\sqrt{89,0}=9,4339...\approx 9,4$(= 94 mm)	1
	$\tan\alpha=\frac{5}{8}\Rightarrow\alpha=32,0053...^\circ\approx 32^\circ$	1
	Toinen terävä kulma on siten $\beta\approx 90^\circ-32^\circ\approx 58^\circ$	1
b)	Kertomalla ristiin: $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2(x+y)=5(x-y)$,	1
	josta $2x+2y=5x-5y \Leftrightarrow 3x=7y$	1
	ja edelleen $x=\dfrac{7y}{3}$, jolloin $\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{3}$	1
	TAI ratkaisemalla suoraan suhde $\frac{x}{y}$ **:**	
	Supistus: $\dfrac{x+y^{(y}}{x-y}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-1}=\dfrac{5}{2}$	1
	$\Leftrightarrow 2\frac{x}{y}+2=5\frac{x}{y}-5\Leftrightarrow 3\frac{x}{y}=7$	1
	$\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{3}$	1

4.	Olkoon kuution särmä aluksi $2a$, jolloin tilavuus $V=(2a)^3=8a^3$ ja pinta-ala $A=6(2a)^2=24a^2$. Puolittunut särmä on a.	1
a)	Uusi tilavuus $V_u=a^3$. Vertailu: $\frac{V_u}{V}=\frac{a^3}{8a^3}=\frac{1}{8}=0{,}125$	1
	$=1-0{,}875$, joten tilavuus on pienentynyt 87,5 %.	1
b)	Uusi pinta-ala $A_u=6a^2$. Vertailu: $\frac{A_u}{A}=\frac{6a^2}{24a^2}=\frac{1}{4}=0{,}25$	1+1
	$=1-0{,}75$, joten pinta-ala on pienentynyt 75 %.	1
	Laskettu kokonaan numeerisesti, esim: Särmän pituus aluksi 2 ja lopuksi 1 …	max 3

<table>
<tr><td>5.</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>mansikkamehua (l)</td><td>kuohuviiniä (l)</td><td>yhteensä (l)</td></tr>
<tr><td>sekoitus 1</td><td>1,2</td><td>2,8</td><td>4,0</td></tr>
<tr><td>sekoitus 2</td><td>0</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td>seos</td><td>1,2</td><td>$2{,}8+x$</td><td>$4{,}0+x$</td></tr>
</table>
tai lähtötiedot muuten esitettyinä</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Ehto: $0{,}2\cdot(4{,}0+x)=1{,}2$,</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>josta $4{,}0+x=6 \Leftrightarrow x=2{,}0$. Kuohuviiniä on siis lisättävä 2,0 l.</td><td>1</td></tr>
</table>

6.	Häkissä on k kaniinia ja f fasaania. Ehdot: $\begin{cases} k+f=35 \\ 4k+2f=94 \end{cases}$	3
	$\Leftrightarrow \begin{cases} k=12 \\ f=23 \end{cases}.$	2
	Vastaus: Kaniineja on 12 ja fasaaneja 23.	1

7.	Tukin halkaisija $2r$ = 20 cm, joten sen säde r = 10 cm.	1
	Vaijerin kunkin suoran osan pituus = $2r$.	1
	Kaarevat osat ovat ympyrän kaaria, joiden keskuskulma $=60^\circ$. [Niiden yhteispituus = koko ympyrän kehän pituus.]	1
	Vaijerin kokonaispituus on siten $6\cdot 2r+2\pi r=$	1
	$120+20\pi$	1
	$=182{,}8318...\approx 183$ (cm)	1
	Likiarvossa tarkkuusvirhe	-1

8.	Kaikki rahasummat ovat euroja. Rahaa on tilillä vaiheen k jälkeen $\left(1+3+3^2+...+3^{k-1}\right)\cdot 100$.	1
	Sulkulauseke on geometrinen summa $\sum a_n$, jossa $a_1=1, q=3, n=k$.	1
	Koko summa on siten $\frac{1\cdot(1-3^k)}{1-3}\cdot 100=50\left(3^k-1\right)$,	1
	joka ylittää Suomen talousarvion, kun $50\left(3^k-1\right)>54{,}1\cdot 10^9$.	1
	Tällöin $3^k>1{,}082\cdot 10^9+1$,	1
	josta $k>\frac{\lg(1{,}082\cdot 10^9+1)}{\lg 3}=18{,}93...$. Ylitys tapahtuu siis 19. vaiheen jälkeen.	1

9.	Mahdollisia setelijonoja on 6 erilaista: (5,5,10,10), (5,10,5,10,), (5,10,10,5), (10,10,5,5), (10,5,10,5) ja (10,5,5,10).	2
	Näistä vain 2 ensimmäistä ovat suotuisia.	2
	Kysytty todennäköisyys on siten $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.	2

10. a)	Funktiolla $y=f(x)$ on olemassa pienin arvo vain silloin, kun $a>0$, jolloin sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.	1
	Pienin arvo saavutetaan derivaatan $f'(x)$ nollakodassa. Tällöin $f'(x)=2ax-4=0$, joka toteutuu, kun $x=\frac{2}{a}$.	1
	Pienin $f = f\left(\frac{2}{a}\right)=8-\frac{4}{a}$. Pienin arvo on 0, kun $a=\frac{1}{2}$.	1
b)	Ehto voi toteutua vain silloin, kun $b<0$, jolloin funktion $g(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.	1
	Lisäksi funktion $g(x)$ nollakohtien on oltava -2 ja 1.	1
	Sijoittamalla x:n arvot saadaan $4b+16=b+4=0$, josta $b=-4$.	1

11.	Sijoitetaan kaavaan $x_1=1$ ja $a=9$. Saadaan $x_2=\frac{1}{3}\left(2x_1+\frac{9}{{x_1}^2}\right)$	2
	$=\frac{11}{3}=3{,}666666666\ldots$	1
	Jatkamalla samalla periaatteella saadaan $x_3=2{,}667584940...$ $x_4=2{,}199974562...$ $x_5=2{,}086498753...$ $x_6=2{,}080103525...$ $x_7=2{,}080083823...$ $x_8=2{,}080083823...\approx x_7$	2
	Vastaus on siten $n=7$.	1

12. a)	Kaavasta $T=-\lg p$ ratkaistuna todennäköisyys $p=10^{-T}$.	1
	$p_{alko}=10^{-3{,}8}=0{,}000158...$	1
	$p_{tapaturma}=10^{-3{,}4}=0{,}000398...>p_{alko}$	1
b)	Koska $p_{loukk}=10^{-3{,}2}$,	1
	niin loukkaantuneiden lukumäärä $=10^{-3{,}2}\cdot 5{,}4\cdot 10^6$	1
	$=3407{,}16...\approx 3400$	1
	Vastauksessa väärä tarkkuus	–1

13. a)	Käyrän tangentin kulmakerroin on suurin derivaatan y' maksimipisteessä eli kohdassa, jossa $y''=0$. $y=-x^3+x^2+3x$ $\Rightarrow y'=-3x^2+2x+3 \Rightarrow y''=-6x+2$	1
	$y''=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. Merkkikaavio osoittaa, että kyseessä on maksimikohta.	1
	Tällöin $y=y\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{29}{27}$. Kysytty piste on siten $\left(\frac{1}{3},\frac{29}{27}\right)$.	1
b)	Tangentin kulmakerroin on $y'\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}$	1
	ja yhtälö $y-\frac{29}{27}=\frac{10}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)$,	1
	eli $y=\frac{10}{3}x-\frac{1}{27}$ tai $90x-27y-1=0$.	1

14. a)	Malli: $y = a(x-2014)+b$ Ehdot: $\begin{cases} y(2014) = b = 607\,417 \\ y(2018) = 4a + b = 629894 \end{cases},$	1
	josta $\begin{cases} a = 5619,25 \\ b = 607\,417 \end{cases}.$	1
b)	Asukasluvun kasvu on $y(2030) - y(2014) = 16a + b - b = 16a$	1
	$= 89908 \approx 90\,000$ (asukasta)	1
c)	Kuvaajajana on suoran $y = 5619,25(x-2014) + 607417$ $\Leftrightarrow y = 5619,25x - 10709752,5$	1
	osa välillä $2014 \le x \le 2030$	1
	Suoraa jatkettu määritysvälin ulkopuolelle	–1

15. a)	$\tan\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 45^\circ + n \cdot 180^\circ,\ n \in \mathbf{Z}.$	1
	Välille $0^\circ \le \gamma \le 360^\circ$ osuvat kulmat 45° ja 225°.	1+1
b)	Kuviosta: $\tan\alpha = \frac{1}{3},\ \tan\beta = \frac{1}{2}.$	1
	Kaavalla: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1,$	1
	joten $\alpha + \beta = 45^\circ = \gamma$.	1