Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

# MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 19.3.2014
# HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

**1. a)** $7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1) \Leftrightarrow 7x-21+1=0 \Leftrightarrow 7x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{7}$.

**b)** Positiivisuusehto on $x(5-8x)>0$. Vasemman puolen nollakohdat ovat $x=0 \vee x=\frac{5}{8}$. Merkkikaavion perusteella ehto toteutuu, kun $0<x<\frac{5}{8}$.

**c)** $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b}+\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b}=(a+b)+(a-b)=2a.$

**2.** Taulukko on

| $f(x)$ | $g(x)$ | $h(x)$ |
|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 |

**3. a)** Pinta-ala saadaan integroimalla erotus $6x^2 + 3x^4 + \frac{1}{x} - 3x^4 = 6x^2 + \frac{1}{x}$, jolloin kysytty ala on

$$\int_1^2 \left(6x^2 + \frac{1}{x}\right) dx = \mathop{/}_1^2 \left(2x^3 + \ln|x|\right) = 14 + \ln 2 \approx 14{,}69.$$

**b)** $g'(x) = \frac{1}{2} \cdot f'(2x) \cdot 2 = f'(2x)$. Koska $f'(x) = 3x^2 - 3$, niin $g'(x) = 3(2x)^2 - 3 = 12x^2 - 3$. Siis $g'(1) = 12 - 3 = 9$.

**4.** Jos $a = 0$, niin yhtälö on muotoa $-5x + 2 = 0$, jolla on täsmälleen yksi ratkaisu. Jos $a \neq 0$, niin yhtälö on 2. astetta ja sillä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun diskriminantti $D = 25 - 8a = 0$, eli kun $a = \frac{25}{8}$.

**5.** Pisteen (8,6) kautta kulkevan suoran $3x - 4y = 0$ normaalin yhtälö on $y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 8) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}y + \frac{25}{2}$. Ympyrän keskipiste sijaitsee normaalilla. Jos ympyrän säde on $r$, niin keskipisteen $\left(-\frac{3}{4}r + \frac{25}{2}, r\right)$ tulee olla alkuperäisestä suorasta etäisyydellä $r$. Näin saadaan ehto

$$\frac{\left|-\frac{9}{4}r + \frac{75}{2} - 4r\right|}{\sqrt{9+16}} = r \Leftrightarrow \left|-\frac{25}{4}r + \frac{75}{2}\right| = 5r \Leftrightarrow -25r + 150 = \pm 20r \Leftrightarrow r = \frac{10}{3} \vee r = 30.$$

Tapauksessa $r = 30$ ympyrä sivuaa negatiivista $x$-akselia. Kysytty säde on siis $\frac{10}{3}$ ja keskipiste $\left(10, \frac{10}{3}\right)$.

**6.** Olkoon $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$, jolloin $f'(x) = 2\sum_{k=1}^{n} (x - a_k) = 2\left(nx - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)$.

Derivaatan nollakohta on $x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Kyseessä on minimikohta, koska funktion $f$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

**7.** Taulukoidaan kaikki mahdolliset silmälukujen summat:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **6** | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **5** | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **4** | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **3** | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **1** | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | **1** | **2** | **3** | **4** |

Kaikkiaan alkeistapauksia on $6 \cdot 4 = 24$ kappaletta.

**a)** Taulukon perusteella saadaan todennäköisyydet:

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=n)$ | 1/24 | 2/24 | 3/24 | 4/24 | 4/24 | 4/24 | 3/24 | 2/24 | 1/24 |

**b)** Summan odotusarvo on

$$\frac{1}{24}(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+4\cdot 6+4\cdot 7+3\cdot 8+2\cdot 9+1\cdot 10)=6.$$

Se voidaan laskea myös seuraavalla tavalla. Tavallisen nopan silmäluvun odotusarvo on 3,5 ja tetraedrinopan silmäluvun odotusarvo on 2,5, joten kysytty odotusarvo saadaan näiden summana.

**8.** Säteet leikkaavat toisensa, jos yhtälö $\overrightarrow{OA}+s\overline{u}=\overrightarrow{OB}+t\overline{v}$ toteutuu joillakin $s>0,\ t>0.$ Tällöin

$$(1+2s)\overline{i}+(-2-s)\overline{j}+(3-3s)\overline{k}=(9-t)\overline{i}+(-1-2t)\overline{j}+(-12+3t)\overline{k}.$$

Vertaamalla komponentteja saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases}1+2s=9-t\\ -2-s=-1-2t\\ 3-3s=-12+3t.\end{cases}$

Ratkaistaan kahdesta ylimmästä yhtälöstä $t=2$ ja $s=3.$ Huomataan, että tällöin myös kolmas yhtälö toteutuu. Näin ollen säteet leikkaavat ja kysytty leikkauspiste on $(7,-5,-6)$.

**9. a)** Leikkauspisteiksi saadaan $A=(6,0,0)$, $B=(0,3,0)$ ja $C=(0,0,2)$. Tällöin kolmio $OAB$ on tetraedrin pohja ja jana $OC$ sen korkeus. Särmien pituudet ovat $OA=6$, $OB=3$ ja $OC=2$. Tetraedrin tilavuus on

$$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{OA\cdot OB}{2}\cdot OC=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{6\cdot 3}{2}\cdot 2=6.$$

**b)** Kolmion sivuina ovat vektorit $\bar{u}=\overrightarrow{AB}=-6\bar{i}+3\bar{j}$ ja $\bar{v}=\overrightarrow{AC}=-6\bar{i}+2\bar{k}$.

Niiden väliselle kulmalle $\varphi$ pätee $\cos\varphi=\dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}=\dfrac{36}{\sqrt{45}\sqrt{40}}=\dfrac{6}{\sqrt{50}}$.

Olkoon $h$ pisteestä $C$ mitattu kolmion korkeus. Koska $\sin\varphi=\dfrac{h}{|\bar{v}|}$, niin

$h=\sqrt{40}\sin\varphi=\sqrt{40}\sqrt{1-\dfrac{36}{50}}=2\sqrt{\dfrac{14}{5}}$. Kolmion $ABC$ pinta-ala on

$\dfrac{1}{2}|\bar{u}|h=3\sqrt{14}.$

**10.** Juustonpalan leikkauskuvio pystysuoran tason $x=t$ kanssa on suorakulmio, jonka kanta on $2\sqrt{r^2-t^2}$. Suorakulmion korkeus H saadaan verrannosta $\dfrac{H}{t}=\dfrac{h}{r}\Leftrightarrow H=\tfrac{h}{r}t$. Leikkauskuvion pinta-ala on

$A(t)=2a\cdot h=\tfrac{2h}{r}t\sqrt{r^2-t^2}$, $0\le t\le r$. Juustopalan tilavuus on

$$\int_0^r A(t)dt=-\tfrac{h}{r}\int_0^r(-2t)\left(r^2-t^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=-\tfrac{h}{r}\Big/_0^r\frac{\left(r^2-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}r^2h.$$

**11. a)** $f'(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1\\ 1, & 1\le x\le 2\\ -x+3, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

**b)** Integroimalla saadaan $f(x)=\begin{cases}\tfrac{1}{2}x^2+C_1, & 0\le x\le 1\\ x+C_2, & 1\le x\le 2\\ -\tfrac{1}{2}x^2+3x+C_3, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

Koska $f(0)=0$ ja integraalifunktio on jatkuva, niin $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + \frac{1}{2} = C_2 + 1 \\ C_2 + 2 = C_3 + 4. \end{cases}$

Ratkaisuksi saadaan $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2}$ ja $C_3 = -\frac{5}{2}$. Tällöin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

**c)** Funktio *f* on derivoituva välillä $0 < x < 4$ ja $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = 3$. Mahdolliset ääriarvokohdat välillä $0 \le x \le 4$ ovat siis 0, 3 ja 4. Koska $f(0) = 0$, $f(3) = 2$ ja $f(4) = \frac{3}{2}$, niin funktion suurin arvo on 2 ja pienin arvo on 0.

**12.** Derivaatan likiarvo grafiikkalaskimella TI-86:

| ***p*** | **lauseke** | **virheen itseisarvo** |
|---|---|---|
| 3 | 0,87734270288 | $2,4 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 0,8775585892 | $2,4 \cdot 10^{-5}$ |
| 5 | 0,877580165 | $2,4 \cdot 10^{-6}$ |
| 6 | 0,87758232 | $2,4 \cdot 10^{-7}$ |
| 7 | **0,8775826** | $3,8 \cdot 10^{-8}$ |
| 8 | 0,877583 | $4,4 \cdot 10^{-7}$ |
| 9 | 0,87759 | $7,4 \cdot 10^{-6}$ |
| 10 | 0,8776 | $1,7 \cdot 10^{-5}$ |
| cos(0,5) | 0,87758256189 | |

Arvo $p = 7$ antaa parhaan likiarvon. Oikea vastaus saattaa riippua käytetystä laskimesta.

**13. a)** Kyseessä on aritmeettinen summa, jonka arvo on

$$(k+1)\frac{n+(n+k)}{2}=\tfrac{1}{2}(k+1)(2n+k).$$

Näin saadaan yhtälö $\tfrac{1}{2}(k+1)(2n+k)=1007 \Leftrightarrow (k+1)(2n+k)=2014.$

**b)** $2014=2\cdot 1007=2\cdot 19\cdot 53.$

**c)** Edellisten kohtien nojalla lauseke $k+1$ voi saada arvot 1, 2, 19, 53, $2\cdot 19$, $2\cdot 53$, $19\cdot 53$ ja $2\cdot 19\cdot 53.$ Tutkimalla kaikki vaihtoehdot havaitaan, että vain seuraavat tekijöihinjaot antavat positiivisia kokonaislukuratkaisuja.

$$2014=2\cdot 1007,\text{ kun } \begin{cases} k+1=2 \\ 2n+k=1007 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ n=503 \end{cases}$$

$$2014=38\cdot 53,\text{ kun } \begin{cases} k+1=38 \\ 2n+k=53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=37 \\ n=8 \end{cases}$$

$$2014=19\cdot 106,\text{ kun } \begin{cases} k+1=19 \\ 2n+k=106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=18 \\ n=44. \end{cases}$$

**14. a)** Kuvion mukainen käyrä koostuu kahdesta ympyrän kaaresta. Ympyrän säde on kolmion sivun pituus $\frac{p}{3}$, ja kaarta vastaava keskuskulma on $\frac{2\pi}{3}$. Kysytty pituus on $2\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{p}{3}=\frac{4\pi}{9}p.$

**b)** Piirretty kuviot.

**c)** Kysytty käyrä koostuu kolmesta ympyrän kaaresta, joista ensimmäinen ja kolmas ovat yhtä pitkät. Ensimmäisen säde on neliön sivun pituus $\frac{p}{4}$**,** ja toisen säde on neliön lävistäjän pituus $\frac{p}{4}\cdot\sqrt{2}.$ Jokaista kaarta vastaava keskuskulma on $\frac{\pi}{2}.$ Kysytty pituus on $2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p}{4}\cdot\sqrt{2}=\frac{(2+\sqrt{2})\pi}{8}p.$

**d)** Kysytty käyrä koostuu viidestä ympyrän kaaresta, joista ensimmäinen ja viides sekä toinen ja neljäs ovat yhtä pitkät. Ensimmäisen kaaren säde on kuusikulmion sivun pituus $\frac{p}{6}$, toisen säde kuusikulmion lyhyemmän lävistäjän pituus $\frac{p\sqrt{3}}{6}$ ja kolmannen säde kuusikulmion pidemmän lävistäjän pituus $\frac{p}{3}.$ Jokaista kaarta vastaava keskuskulma on $\frac{\pi}{3}.$ Kysytty pituus on $2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{p}{6}+2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}p+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{p}{3}=\frac{(1+2\sqrt{3}+1)\pi}{9}p=\frac{\left(2+2\sqrt{3}\right)\pi}{9}p.$

**15. a)** Koska $g_0(x)=1,\ g_0 * f_1 = \int_{-1}^{1} 1\cdot x\,dx = 0$ ja $g_0 * g_0 = \int_{-1}^{1} 1\cdot 1 dx = 2,$ niin

$g_1(x) = x - \frac{0}{2}\cdot 1 = x.$ Koska $g_0 * f_2 = \int_{-1}^{1} 1\cdot x^2\,dx = \frac{2}{3},$

$g_1 * f_2 = \int_{-1}^{1} x\cdot x^2\,dx = 0$ ja $g_1 * g_1 = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx = \frac{2}{3},$ niin

$g_2(x) = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\cdot 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}}x = x^2 - \frac{1}{3}.$

**b)** Koska $g_0 * g_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0,\ g_0 * g_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})\,dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ ja

$g_1 * g_2 = \int_{-1}^{1} x(x^2 - \frac{1}{3})\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right)dx = \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0,$

niin ortogonaalisuus on voimassa.

**c)** Lasketaan skalaaritulot:

$$h * g_0 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx = \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right) = \frac{2}{3}a + 2c,$$

$$h * g_1 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)xdx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx\right)x\,dx$$

$$= \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b,$$

$$h * g_2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)xdx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^5 + ax^4 + (b - \tfrac{1}{3})x^3 + (c - \tfrac{a}{3})x^2 - \frac{b}{3}x - \frac{c}{3}\right)dx$$

$$= \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{20}x^5 + \frac{3b-1}{12}x^4 + \frac{3c-a}{9}x^3 - \frac{b}{6}x^2 - \frac{c}{3}x\right)$$

$$= \frac{a}{10} + \frac{6c-2a}{9} - \frac{2c}{3} = -\frac{11}{90}a.$$

Funktiot ovat ortogonaaliset, kun $\frac{2}{3}a + 2c = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b = -\frac{11}{90}a = 0,$ josta

$a = c = 0$ ja $b = -\frac{3}{5}.$

## Alustava pisteitys

| | | |
|---|---|---|
| **1. a)** | $7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1) \Leftrightarrow 7x-21+1=0$ | 1 |
| | $\Leftrightarrow 7x=20 \Leftrightarrow x=\frac{20}{7}$ | 1 |
| **b)** | Ehto: $x(5-8x)>0$. Vasemman puolen nollakohdat: $x=0 \lor 5-8x=0 \Leftrightarrow x=0 \lor x=\frac{5}{8}$. | 1 |
| | Koska lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, niin ehto toteutuu, kun $0<x<\frac{5}{8}$. | 1 |
| **c)** | Tekijöihin jako: $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}+\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=\dfrac{(a-b)(a+b)}{a-b}+\dfrac{(a-b)(a+b)}{a+b}$, | 1 |
| | josta supistamalla**:** $(a+b)+(a-b)=2a$ | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **2.** | Funktio | $f(x)$ | $g(x)$ | $h(x)$ | a´ 2 |
| | Derivaatta | 4 | 1 | 3 | |

| | | |
|---|---|---|
| **3. a)** | Käyrien väliin jää: $y_1-y_2=6x^2+\frac{1}{x}$, | 1 |
| | jolloin kysytty ala $A=\int_1^2\left(6x^2+\frac{1}{x}\right)dx=\Big/_1^2\left(2x^3+\ln\lvert x\rvert\right)$ | 1 |
| | $=16+\ln 2-2-\ln 1=14+\ln 2=14{,}6931...\approx 14{,}69$. | 1 |
| **b)** | $g(x)=\frac{1}{2}f(2x)=\frac{1}{2}\left((2x)^3-3(2x)\right)=4x^3-3x$, | 1 |
| | josta $g'(x)=12x^2-3$, | 1 |
| | joten $g'(1)=12-3=9$. | 1 |
| | **TAI:** | |
| | $g'(x)=\frac{1}{2}\cdot f'(2x)\cdot 2=f'(2x)$ | 1 |
| | Koska $f'(x)=3x^2-3$, | 1 |
| | niin $g'(1)=f'(2)=12-3=9.$ | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **4.** | Jos $a=0$, niin yhtälö on muotoa $-5x+2=0$, jolla on vain yksi ratkaisu $\left[x=\frac{2}{5}\right]$. | 2 |
| | Jos $a\neq 0$, niin yhtälö on 2. astetta ja sillä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun diskriminantti $D=25-8a=0$, | 2 |
| | eli kun $a=\frac{25}{8}$. [tällöin $x=\frac{4}{5}$] | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| **5.** | Suoran *s*: $3x-4y=0 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x$ pisteeseen (8,6) piirretyn normaalin yhtälö on $y-6=-\frac{4}{3}(x-8) \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}y+\frac{25}{2}$. | 1 |
| | Kysytyn ympyrän säde $=r$. Tällöin sen keskipisteen $(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2}, r)$ tulee olla suorasta *s* etäisyydellä *r*. | 1 |
| | Saadaan ehto: $\frac{\left\lvert -\frac{9}{4}r+\frac{75}{2}-4r\right\rvert}{\sqrt{9+16}}=r \Leftrightarrow \left\lvert -\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right\rvert=5r$ | 1 |
| | $\Leftrightarrow -25r+150=\pm 20r$ | 1 |
| | $\Leftrightarrow r=\frac{10}{3} \vee r=30$, joista jälkimmäinen arvo ei kelpaa (tällöin ympyrä sivuaisi negatiivista *x*-akselia). | 1 |
| | Kysytty säde on siis $\frac{10}{3}$ ja keskipiste $\left(10, \frac{10}{3}\right)$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **6.** | Lauseke $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$, | 1 |
| | josta $f'(x)=2\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)=2\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$. | 2 |
| | Nollakohta: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ [= vakioiden $a_k$ keskiarvo)]. | 2 |
| | Kyseessä on minimikohta, koska funktion $f(x)$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. | 1 |

<table>
<tr><td>7.<br>a)</td><td>Pistesumma $\underline{x}$ saa arvot 2,3,4,…,10. Näillä on suotuisia alkeistapa-uksia vastaavasti 1,2,3,4,4,4,3,2,1 kpl. Kaikkiaan alkeistapauksia $6\cdot 4=24$ kpl.<br>Tulos = $\underline{x}_i$, todennäköisyys = $p_i$. Tulokset oheissa taulukossa:
<table>
<tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
</table></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Taulukon perusteella saadaan todennäköisyydet:
<table>
<tr><td>$\underline{x}_i$</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>$p_i$</td><td>1/24</td><td>2/24</td><td>3/24</td><td>4/24</td><td>4/24</td><td>4/24</td><td>3/24</td><td>2/24</td><td>1/24</td></tr>
</table></td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Summan odotusarvo on<br>$\frac{1}{24}(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+4\cdot 6+4\cdot 7+3\cdot 8+2\cdot 9+1\cdot 10)$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>$=6$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>TAI:</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Odotusarvo myös suoraan: $2{,}5+3{,}5=6{,}0$</td><td>3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>8.</td><td>Säteet leikkaavat toisensa, jos $\exists s,t\in\mathbf{R}$: $\overrightarrow{OA}+s\bar{u}=\overrightarrow{OB}+t\bar{v}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Leftrightarrow$<br>$(1+2s)\bar{i}+(-2-s)\bar{j}+(3-3s)\bar{k}=(9-t)\bar{i}+(-1-2t)\bar{j}+(-12+3t)\bar{k}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Tämä toteutuu, kun $\begin{cases}1+2s=9-t\\ -2-s=-1-2t\\ 3-3s=-12+3t\end{cases}$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Kahdesta ylimmästä yhtälöstä saadaan $\begin{cases}t=2\\ s=3\end{cases}$,</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>jotka arvot toteuttavat myös alimman yhtälön, joten säteet leikkaavat.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Sijoittamalla $s$:n ja $t$:n arvot, saadaan leikkauspisteeksi $(7,-5,-6)$.</td><td>1</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| **9.**<br>**a)** | Nollaamalla tason yhtälössä 2 muuttujaa kerrallaan saadaan tetraedrin kärkipisteiksi $O,\ A=(6,0,0),\ B=(0,3,0)$ ja $C=(0,0,2)$. | 1 |
| | Olkoon kolmio $OAB$ tetraedrin pohja ja $OC$ sen korkeus.<br>Särmien pituudet ovat $OA=6,\ OB=3$ ja $OC=2$. | 1 |
| | Tällöin tetraedrin tilavuus on $\frac{1}{3}\cdot\frac{OA\cdot OB}{2}\cdot OC=\frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 3}{2}\cdot 2=6$. | 1 |
| **b)** | Tulkitaan nyt $\Delta ABC$ tetraedrin pohjaksi. Koska tetraedrin tilavuus $V=\frac{1}{3}Ah$, on pohjan ala $A=\frac{3V}{h}$. | 1 |
| | Edellä on saatu $V=6$. Korkeus $h$ on sama kuin origon etäisyys pohjatasosta, eli $h=\frac{\lvert 0-0-0-6\rvert}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$. | 1 |
| | Kysytty ala on siten $A=\frac{3\cdot 6}{\frac{6}{\sqrt{14}}}=3\sqrt{14}$. | 1 |
| | **TAI** ristitulolla: | |
| | $\overrightarrow{AB}=-6\bar{i}+3\bar{j}=\bar{u}$ ja $\overrightarrow{AC}=-6\bar{i}+2\bar{k}=\bar{v}$ | 1 |
| | $\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -6 & 3 & 0\\ -6 & 0 & 2\end{vmatrix}=6\bar{i}+12\bar{j}+18\bar{k}$ | 1 |
| | $A_{ABC}=\frac{\lvert\bar{u}\times\bar{v}\rvert}{2}=\frac{6\sqrt{1+4+9}}{2}=3\sqrt{14}$ | 1 |
| | **TA**I pistetuloilla: | |
| | $\bar{u}\cdot\bar{v}=36,\ \lvert\bar{u}\rvert=\sqrt{36+9}=3\sqrt{5}$<br>Vektorin $\bar{v}$ projektiovektori vektorilla $\bar{u}$ $\overline{v_u}=\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{\bar{u}\cdot\bar{u}}\bar{u}$<br>$=\frac{36}{45}\bar{u}=\frac{4}{5}\bar{u}=-\frac{24}{5}\bar{i}+\frac{12}{5}\bar{j}$. | 1 |
| | Kantaa vastaan kohtisuora korkeusvektori on tällöin $\bar{h}=\bar{v}-\overline{v_u}$<br>$=-\frac{6}{5}\bar{i}-\frac{12}{5}\bar{j}+2\bar{k}$, josta $\lvert\bar{h}\rvert=\frac{1}{5}\sqrt{36+144+100}=\frac{2}{5}\sqrt{70}$. | 1 |
| | Tällöin $A_{ABC}=\frac{\lvert\bar{u}\rvert\lvert\bar{h}\rvert}{2}=\frac{3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{70}}{2\cdot 5}=3\sqrt{14}$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **10.** | Leikataan juustopalaa lieriön pohjan halkaisijan suuntaisella pystysuoralla tasolla etäisyydellä $x$ pohjan halkaisijasta. $(0 \le x \le r)$. | 1 |
| | Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka kanta $= 2a$, jossa $a = \sqrt{r^2 - x^2}$. | 1 |
| | Suorakulmion korkeus H saadaan verrannosta: $\dfrac{H}{x} = \dfrac{h}{r} \Leftrightarrow H = \frac{h}{r}x$. | 1 |
| | Leikkauskuvion pinta-ala: $A(x) = 2a \cdot h = \frac{2h}{r}x\sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \le x \le r$. | 1 |
| | Juustopalan tilavuus on siten $\int_0^r A(x)dx = -\frac{h}{r}\int_0^r (-2x)\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$ | 1 |
| | $= -\frac{h}{r} \Big/_0^r \dfrac{\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2h}{3r}\left(0 - r^3\right) = \frac{2}{3}r^2 h$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **11. a)** | Koska murtoviivan ensimmäinen osa on osa suoraa $y = x$, toinen osa suoraa $y = 1$ ja kolmas suoraa $y = -x + 3$, | 1 |
| | niin derivaattafunktio on $f'(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 \le x \le 2 \\ -x+3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$ | 1 |
| **b)** | Integroimalla saadaan: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1, & 0 \le x \le 1 \\ x + C_2, & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C_3, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$ | 1 |
| | Koska integraalifunktio on jatkuva, niin $\begin{cases} C_1 + \frac{1}{2} = C_2 + 1 \\ C_2 + 2 = C_3 + 4 \end{cases}$.<br>Merkitään $C_1 = C$. Tällöin $C_2 = C - \frac{1}{2}$ ja $C_3 = C - \frac{5}{2}$.<br>Alkuehto $f(0) = 0$ antaa: $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2}$ ja $C_3 = -\frac{5}{2}$.<br>Tällöin $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$. | 1 |
| **c)** | Funktio *f* on derivoituva välillä $0 < x < 4$ ja $f'(x) = 0$ vain kohdassa $x = 3$. | 1 |
| | Ääriarvoehdokkaat ovat siten: $f(0) = 0$, $f(3) = 2$ ja $f(4) = \frac{3}{2}$, joista suurin arvo on 2 ja pienin 0. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **12.** | Derivaatan likiarvo grafiikkalaskimella TI-86: | 5 |
| | Arvo $p=7$ antaa parhaan likiarvon. | 1 |
| | | |
| | Oikea vastaus saattaa riippua käytetystä laskimesta | |

| ***p*** | **lauseke** | **virheen itseisarvo** |
|---|---|---|
| 3 | 0,87734270288 | $2{,}4\cdot 10^{-4}$ |
| 4 | 0,8775585892 | $2{,}4\cdot 10^{-5}$ |
| 5 | 0,877580165 | $2{,}4\cdot 10^{-6}$ |
| 6 | 0,87758232 | $2{,}4\cdot 10^{-7}$ |
| **7** | **0,8775826** | $3{,}8\cdot 10^{-8}$ |
| 8 | 0,877583 | $4{,}4\cdot 10^{-7}$ |
| 9 | 0,87759 | $7{,}4\cdot 10^{-6}$ |
| 10 | 0,8776 | $1{,}7\cdot 10^{-5}$ |
| cos(0,5) | 0,87758256189 | |

| | | |
|---|---|---|
| **13. a)** | Kyseessä on aritmeettinen summa $\sum a_n$, jossa $a_1 = n,\ a_n = n + k$ ja termejä $k+1$ kpl. Summakaavalla saadaan $S_{k+1} = (k+1)\dfrac{n+(n+k)}{2}$ $= \frac{1}{2}(k+1)(2n+k)$ | 1 |
| | Koska $\frac{1}{2}(k+1)(2n+k) = 1007$, niin $(k+1)(2n+k) = 2014$. | 1 |
| **b)** | $2014 = 2 \cdot 1007$ | 1 |
| | $= 2 \cdot 19 \cdot 53$ | 1 |
| **c)** | Edellisten kohtien nojalla tekijä $k+1$ voi saada arvot 1, 2, 19, 53, $2 \cdot 19$, $2 \cdot 53$, $19 \cdot 53$ ja $2 \cdot 19 \cdot 53$. | 1 |
| | Tutkimalla kaikki vaihtoehdot havaitaan, että vain seuraavat tekijöihinjaot antavat positiivisia kokonaislukuratkaisuja: <br> $2014 = 2 \cdot 1007$, kun $\begin{cases} k+1 = 2 \\ 2n+k = 1007 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ n = 503 \end{cases}$ <br> $2014 = 38 \cdot 53$, kun $\begin{cases} k+1 = 38 \\ 2n+k = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 37 \\ n = 8 \end{cases}$ <br> $2014 = 19 \cdot 106$, kun $\begin{cases} k+1 = 19 \\ 2n+k = 106 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 18 \\ n = 44 \end{cases}$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| ***14 a)** | Kolmion sivu = $s$. Tällöin $3s = p \Leftrightarrow s = \frac{p}{3}$.<br>Käyrä koostuu kahdesta identtisestä $s$-säteisestä ympyrän kaaresta, joissa keskuskulma = $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. | 1 |
| | Käyrän pituus $= 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{p}{3} = \frac{4\pi}{9} p$. | 1 |
| **b)** | Piirretty käyrät | 1+1 |
| **c)** | Käyrä koostuu kolmesta ympyrän kaaresta, joista ensimmäinen ja kolmas ovat yhtä pitkät. Ensimmäisen säde = neliön sivu $\frac{p}{4}$ ja toisen säde = neliön lävistäjä $\frac{p\sqrt{2}}{4}$. Jokaista kaarta vastaava keskuskulma = $\frac{\pi}{2}$. | 1 |
| | Käyrän pituus $= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p}{4} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{(2+\sqrt{2})\pi}{8} p$. | 1 |
| **d)** | Käyrä koostuu nyt viidestä ympyrän kaaresta, joista ensimmäinen ja viides sekä toinen ja neljäs ovat yhtä pitkät. | 1 |
| | Ensimmäinen säde = 6-kulmion sivu $= \frac{p}{6}$, toinen säde = 6-kulmion lyhyempi lävistäjä$= \frac{p\sqrt{3}}{6}$ ja kolmas säde = 6-kulmion pitempi lävistäjä $\frac{p}{3}$. Kutakin kaarta vastaava keskuskulma = $\frac{\pi}{3}$. | 1 |
| | Käyrän pituus $= 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{p}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} p + \frac{\pi}{3} \cdot \frac{p}{3} = \frac{\pi}{9} p + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} p + \frac{\pi}{9} p$<br>$= \frac{(1+2\sqrt{3}+1)\pi}{9} p = \frac{\left(2+2\sqrt{3}\right)\pi}{9} p$. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| ***15 a)** | Koska $g_0(x)=1,\ g_0 * f_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ ja $g_0 * g_0 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$, | 1 |
| | niin $g_1(x) = x - \frac{0}{2}\cdot 1 = x$. | 1 |
| | Koska $g_0 * f_2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3},\ g_1 * f_2 = \int_{-1}^{1} xx^2\,dx = 0$ ja<br>$g_1 * g_1 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$, | 1 |
| | niin $g_2(x) = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\cdot 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}}x = x^2 - \frac{1}{3}$. | 1 |
| **b)** | Koska $g_0 * g_1 = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ ja $g_0 * g_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})\,dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ | 1 |
| | sekä $g_1 * g_2 = \int_{-1}^{1} x(x^2 - \frac{1}{3})\,dx = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{1}{3}x\right)dx$<br>$= \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2\right) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$, niin ortogonaalisuus on voimassa. | 1 |
| **c)** | Lasketaan skalaaritulot:<br>$h * g_0 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx = \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right) = \frac{2}{3}a + 2c$,<br>$h * g_1 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)xdx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx\right)xdx$<br>$= \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2\right) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b$,<br>$h * g_2 = \int_{-1}^{1} \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)xdx$<br>$= \int_{-1}^{1} \left(x^5 + ax^4 + (b - \frac{1}{3})x^3 + (c - \frac{a}{3})x^2 - \frac{b}{3}x - \frac{c}{3}\right)dx$<br>$= \Big/_{-1}^{1} \left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{a}{20}x^5 + \frac{3b-1}{12}x^4 + \frac{3c-a}{9}x^3 - \frac{b}{6}x^2 - \frac{c}{3}x\right) = \frac{a}{10} + \frac{6c-2a}{9} - \frac{2c}{3}$<br>$= -\frac{11}{90}a$. | 1 |
| | Funktiot ovat ortogonaaliset, kun $\frac{2}{3}a + 2c = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}b = -\frac{11}{90}a = 0$, | 1 |
| | josta $a = c = 0$ ja $b = -\frac{3}{5}$. | 1 |