YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

18.3.2015

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. Piirrä kolme yksikköympyrää ja merkitse niihin seuraavat kulmat ja vastaavat kehäpisteet:

a) 405°

b) -120°

c) $\frac{3\pi}{4}$ rad.

2. **a)** Piirrä kuva epäyhtälöiden $0 \le y \le \sqrt{|x|}$ määräämästä tasoalueesta, kun $-1 \le x \le 1$.

b) Ratkaise yhtälö $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$.

3. Vieraita kieliä äidinkielenään puhuvien Helsingin asukkaiden lukumäärä kasvoi vuosittain 7,5 prosenttia aikavälillä 2003−2013. Vuonna 2013 arvioitiin, että vuosina 2013−2033 kyseessä oleva lukumäärä vielä kaksinkertaistuu. Laske vieraskielisten asukkaiden lukumäärän keskimääräinen vuosittainen kasvuprosentti näiden 30 vuoden aikana.

4. Tarkastellaan yhtälöä $t^4x^2 + (t^2+1)x + 1 = 0$ parametrin $t \ne 0$ eri arvoilla.

a) Ratkaise yhtälö, kun $t = 1$.

b) Määritä kaikki ne parametrin $t \ne 0$ arvot, joilla yhtälöllä on ainakin yksi ratkaisu $x \in \mathbf{R}$.

5. Olkoot $A = (-2,2)$, $B = (3,1)$, $C = (-2,3)$ ja $D = (1,-1)$. Laske janojen AB ja CD leikkauspisteen koordinaattien tarkat arvot.

6. Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa $N(100,15)$. Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä.

7. **a)** Millä muuttujan x arvoilla lauseke $\ln(\sin x)$ on määritelty? Muuttuja x on ilmaistu radiaaneina.

b) Määritä kaksidesimaaliset likiarvot yhtälön $|\ln(\sin x)| = 2$ kaikille ratkaisuille välillä $0 < x < 10$.

8. Öljysäiliö on suoran ympyrälieriön muotoinen, ja sen akseli on vaakasuorassa. Akselia vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen halkaisija on $1{,}3$ metriä.

a) Määritä säiliön pituus, kun sen tilavuus on $3\ 000$ litraa.

b) Öljyn korkeudeksi syvimmässä kohdassa mitataan 40 senttimetriä. Kuinka monta litraa öljyä on jäljellä säiliössä?

<http://www.tankkituomiset.fi/palavan-nesteen-sailiot/kuivurisailiot>. Luettu 20.2.2014.

9. Suoran ympyräkartion muotoista telttaa varten on varattu 16 neliömetriä kangasta. Kangasta ei käytetä teltan pohjaan. Määritä pohjaympyrän halkaisija silloin, kun teltan tilavuus on suurin mahdollinen.

<http://www.indios.cz/cs/rytirske-a-stredoveke-stany/merlin/>. Luettu 3.2.2014.

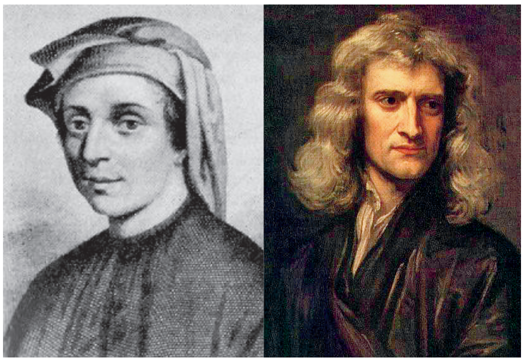
10. Olkoon $a>0$. Funktion $f(x)=a\sqrt{x}$ kuvaaja $y=f(x)$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä $[0,1]$, jolloin syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus on 2π. Määritä tämän pyörähdyskappaleen vaipan pinta-ala kaavalla $A=2\pi\int_0^1 |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

11. Osoita, että 7-järjestelmässä ilmaistu luku $a_5 7^5 + a_4 7^4 + a_3 7^3 + a_2 7^2 + a_1 7 + a_0$ on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun numeroiden summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on jaollinen luvulla 6. Tässä $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

12. Italialainen Fibonacci laski vuonna 1225 yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ juurelle likiarvon $x \approx 1{,}368808108$.

a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi juuri reaalilukujen joukossa.

b) Kuinka mones Newtonin menetelmän iterointikierros tuottaa ensimmäisen kerran samat yhdeksän desimaalia kuin Fibonaccin likiarvossa, kun alkuarvona on $x_0 = 1$?



<http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci>. Luettu 20.2.2014.
<http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton>. Luettu 17.3.2014.

13. a) Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

on derivoituva kohdassa $x = 0$.

b) Olkoon $g(x) = f'(x)$, kun $x \in \mathbf{R}$. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, ettei funktio $g(x)$ ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

***14.** Koirien kaksipäiväiseen HeinäHaukku-tapahtumaan ilmoittaudutaan joko lauantainäyttelyyn, sunnuntainäyttelyyn tai molempiin. Eräänä vuonna HeinäHaukkuun ilmoitettiin $1\ 372$ koiraa, joista 31 ilmoitettiin vain lauantainäyttelyyn ja 43 vain sunnuntainäyttelyyn. Olkoon L tapahtuma ”HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin lauantainäyttelyyn” ja S tapahtuma ”HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin sunnuntainäyttelyyn”.

a) Laske todennäköisyys $P(L$ ja $S)$ kyseisenä vuonna. (3 p.)

b) Miten todennäköisyyslaskennassa määritellään kahden tapahtuman riippumattomuus? (2 p.)

c) Ovatko L ja S riippumattomia kyseisenä vuonna? (2 p.)

d) Olkoot yleisesti a vain lauantaille ilmoitettujen koirien lukumäärä, b kummallekin päivälle ilmoitettujen lukumäärä ja c vain sunnuntaille ilmoitettujen lukumäärä. Millä lukuja a, b ja c koskevalla ehdolla tapahtumat L ja S ovat riippumattomia? (2 p.)

***15.** Tarkastellaan summaa $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

a) Laske summat, kun $n = 1, 2, \ldots, 5,$ ja muodosta niiden perusteella arvaus summan arvolle ylärajan n funktiona. (2 p.)

b) Määritä sellaiset kertoimet $A \in \mathbf{R}$ ja $B \in \mathbf{R}$, että kaava

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

on voimassa kaikilla $k \geq 1$. (2 p.)

c) Todista a-kohdassa arvaamasi lauseke oikeaksi käyttämällä b-kohdan kaavaa. (4 p.)

d) Määritä raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. (1 p.)