MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 18.3.2015
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

1.	Kuhunkin kohtaan merkitään piste yksikköympyrän kehälle sekä kaari, joka osoittaa kulman loppukyljen sijainnin ja kulman suuntauksen.	
a)	$405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$	2
b)	Kyseessä on myötäpäivään suunnattu kulma $90^\circ + 30^\circ$.	2
c)	$\frac{3\pi}{4}$ rad = 135°	2

2. a)	Kaksoisepäyhtälö $0 \le y \le \sqrt{\lvert x \rvert}$ toteutuu xy-tason alueessa, jota rajoittavat käyrät $y = \sqrt{x}$, $x \ge 0$, $y = \sqrt{-x}$, $x \le 0$, x-akseli sekä pystysuorat $x = 1$ ja $x = -1$.	2
	Kuvio (Kuva 2 lopussa)	1
b)	Yhtälö $x\sqrt{1+x} = \sqrt{2x}$ voi toteutua vain, kun $x \ge 0$. Tällöin se voidaan neliöidä puolittain. Saadaan: $x^2(1+x) = 2x \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$	1
	$\Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 1 \lor x = -2$.	1
	Luku -2 ei kuitenkaan toteuta neliöintiehtoa $x \ge 0$, joten ratkaisu on $x = 0 \lor x = 1$.	1

3.	Vieraskielisten lukumäärä $m(t) = a \cdot 1{,}075^t$. Määrä aluksi vuonna 2003 on $m(0) = a$.	1
	Vuonna 2013 määrä on $m(10) = a \cdot 1{,}075^{10}$.	1
	Vuonna 2033 määrä on $2 \cdot m(10) = 2a \cdot 1{,}075^{10}$.	1
	Jos vuosittainen kasvukerroin 30 vuoden aikana on k, niin saadaan yhtälö $a \cdot k^{30} = 2a \cdot 1{,}075^{10}$,	1
	josta $k^{30} = 2 \cdot 1{,}075^{10} \Leftrightarrow k = \sqrt[30]{2 \cdot 1{,}075^{10}}$	1
	$1{,}0483...$, joten keskimääräinen vuosittainen kasvuprosentti on ollut noin 4,8.	1

4. a)	Kun $t = 1$, niin yhtälö on $x^2 + 2x + 1 = 0$	1
	$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$ (tai ratkaisukaavalla $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$)	1
	$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. ($x = \frac{-2}{2} = -1$)	1
b)	Koska $t \ne 0$, on kyseessä toisen asteen yhtälö. Tällöin sillä on ainakin yksi ratkaisu, kun sen diskriminantti $D \ge 0$.	1
	$D = \left(t^2+1\right)^2 - 4t^4 = \left(t^2+1\right)^2 - \left(2t^2\right)^2 = \left(t^2+1+2t^2\right)\left(t^2+1-2t^2\right)$ $= \left(3t^2+1\right)\left(1-t^2\right) \ge 0$ (tai $-3t^4 + 2t^2 + 1 \ge 0 \ldots$)	1
	Koska tulon ensimmäinen tekijä on aina > 0, niin epäyhtälö toteutuu, kun $1 - t^2 \ge 0 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1$. Vastaus on siten $-1 \le t \le 1 \land t \ne 0$.	1

5.	Janojen kulmakertoimet ovat $k_{AB} = \frac{1-2}{3+2} = -\frac{1}{5}$, $k_{CD} = \frac{-1-3}{1+2} = -\frac{4}{3}$	1
	ja yhtälöt $s_{AB} : y-1 = -\frac{1}{5}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$ ja $s_{CD} : y+1 = -\frac{4}{3}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.	1+1
	Vertaamalla oikeita puolia saadaan: $-\frac{1}{5}x + \frac{8}{5} = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$	1
	$\Leftrightarrow -3x + 24 = -20x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{17}$.	1
	Sijoittamalla tämä yhtälöön s_{CD} saadaan: $y = -\frac{4}{3}\left(-\frac{19}{17}\right) + \frac{1}{3} = \frac{31}{17}$. Leikkauspiste on siten $\left(-\frac{19}{17}, \frac{31}{17}\right)$.	1

6.	Normitus: Kun älykkyysosamäärä X noudattaa jakaumaa $N(100,15)$, niin muuttuja $Z = \frac{X-100}{15}$ noudattaa normitettua jakaumaa $N(0,1)$.	1
	Olkoon kysytty yläraja a. Tällöin on oltava $P(-a < X < a) = 0,50$, joten normaalijakauman symmetrian perusteella on oltava $P(X < a) = 0,75$,	1
	eli $P\left(Z < \frac{a-100}{15}\right) = \Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) = 0,75$.	1
	Kertymäfunktiotaulukon mukaan $\frac{a-100}{15} \approx 0,68$,	1
	josta $a \approx 15 \cdot 0,68 + 100 = 110,2$.	1
	Kysytty väli on siten $[100-10, 100+10] = [90,110]$ tai $[89,111]$. Rajat voidaan ilmaista myös yhden desimaalin tarkkuudella.	1

7. a)	Lauseke $\ln(\sin x)$ on määritelty, kun $\sin x > 0$	1
	$\Leftrightarrow n2\pi < x < \pi + n2\pi$ [$\Leftrightarrow n2\pi < x < (2n+1)\pi$], $n \in \mathbf{Z}$.	2
b)	$\lvert\ln(\sin x)\rvert = 2 \Leftrightarrow \ln(\sin x) = \pm 2 \Leftrightarrow \sin x = e^{\pm 2}$. Etumerkki + ei kelpaa sillä, $e^2 > 1$. Saadaan $\sin x = e^{-2}$,	1
	jonka yksi ratkaisu on $x_1 = 0,1357... \approx 0,14$ ja muut annetulla välillä olevat ratkaisut ovat $x_2 = \pi - x = 3,0058... \approx 3,01$, $x_3 = 2\pi + x = 6,4189... \approx 6,42$ ja $x_4 = 3\pi - x = 9,2890... \approx 9,29$.	2
	Yksi ratkaisu väärin	–1
	Useampi ratkaisu väärin	–2

8. a)	Säiliön poikkileikkausympyrän säde $r=\frac{13}{2}$ dm ja säiliön pituus on *l*. 1 litra = 1 dm^3.	1
	Säiliön tilavuus $V=\pi r^2 l=\pi\left(\frac{13}{2}\right)^2 l=3000\,(dm^3)$.	1
	Tästä saadaan $l=\dfrac{4\cdot 3000}{\pi\cdot 13^2}=22,6018...$ (dm). Säiliön pituus on siten n. 2,3 m tai 2,26 m.	1
b)	Kuvion merkinnöin $r=65$ cm, $a=r-h=25$ cm ja $b=\sqrt{r^2-a^2}=\sqrt{3600}=60$ (cm). Keskuskolmion ala $A_k=\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot a=ab=1500$ (cm^2). (Kuvio 8 lopussa)	1
	Jos keskuskulman puolikas on φ, niin sille pätee $\sin\varphi=\dfrac{b}{r}=\dfrac{60}{65}=0,9230...,$ josta $\varphi=67,3801...^\circ$. Sektorin ala $A_s=\dfrac{2\varphi}{360^\circ}\pi r^2=4968,622...\,cm^2=49,6862...\,dm^2$.	1
	Segmentin ala $A=A_s-A_k=34,6862...\,dm^2$. Jäljellä olevan öljyn tilavuus on siten $Al=783,9705...\,dm^3\approx 784$ litraa.	1

9.	Olkoon teltan pohjan säde *r* ja sivujana *s*, jolloin korkeus $h=\sqrt{s^2-r^2}$. Teltan vaipan ala $A=\pi rs=16$, josta $s=\dfrac{16}{\pi r}$.	1
	Teltan tilavuus $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{s^2-r^2}$.	1
	Sijoitetaan tähän $s=\dfrac{16}{\pi r}$, jolloin saadaan $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\sqrt{\dfrac{256}{\pi^2 r^2}-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{256r^2-\pi^2 r^6}$.	1
	$V(r)$ on suurin, kun juurrettava $f(r)=256r^2-\pi^2 r^6$, $r>0$, on suurin. Derivoidaan: $f'(r)=512r-6\pi^2 r^5=2r\left(256-3\pi^2 r^4\right)$.	1
	Nollakohdat: $f'(r)=0\Leftrightarrow r=0\vee r^4=\dfrac{256}{3\pi^2}\Leftrightarrow r=0\vee r=\pm\dfrac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$.	1
	Näistä vain $r=+\dfrac{4}{\sqrt[4]{3\pi^2}}$ on kelvollinen, ja sen likiarvo on 1,715. Se on myös tilavuuden $V(r)$ maksimikohta, joten kysytty lattian halkaisija $2r\approx 3,43$ (m).	1

10.	Pyörähdyskappaleen tilavuus $V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 a^2xdx=\pi a^2 \Big/_0^1 \tfrac{1}{2}x^2=\tfrac{1}{2}\pi a^2$. (Saadaan myös suoraan pyörähdysparaboloidin kaavalla $V=\frac{1}{2}\pi r^2 h$.)	1
	Tilavuusehto antaa yhtälön $\tfrac{1}{2}\pi a^2=2\pi \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 2$, joista vain etumerkki + kelpaa.	1
	Koska nyt $y=2\sqrt{x}$, niin $y'=\dfrac{2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.	1
	Kysytty vaipan ala $A=2\pi\int_0^1 \lvert y\rvert\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ $=2\pi\displaystyle\int_0^1 \lvert 2\sqrt{x}\rvert\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=4\pi\int_0^1\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}dx=$	1
	$4\pi\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx=4\pi\Big/_0^1\dfrac{(x+1)^{3/2}}{3/2}=$	1
	$=\dfrac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=15{,}3177\ldots\approx 15{,}3$ pinta-alayksikköä.	1

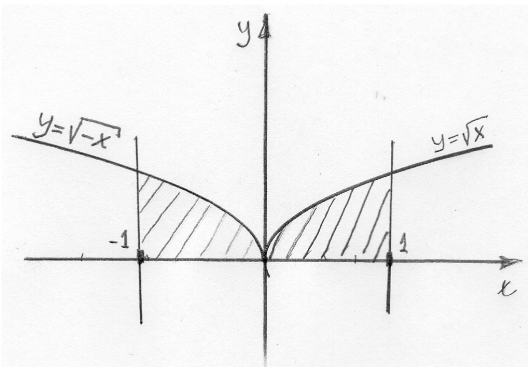
11.	Kuusinumeroinen 7-kantainen luku $n = a_5 \cdot 7^5 + a_4 \cdot 7^4 + a_3 \cdot 7^3 + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0$ kirjoitetaan muotoon $a_5(6+1)^5 + a_4(6+1)^4 + a_3(6+1)^3 + a_2(6+1)^2 + a_1(6+1) + a_0$.	2
	Binomikaavan mukaan $(6+1)^5 = 6^5 + 5 \cdot 6^4 \cdot 1 + 10 \cdot 6^3 \cdot 1^2 + 10 \cdot 6^2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 6 \cdot 1^4 + 1 = 6a + 1$, jossa a on kokonaisluku.	1
	Vastaavaan muotoon saadaan myös kaikki alemmat lausekkeen $6+1$ potenssit. Näin ollen $n = a_5(6a+1) + a_4(6b+1) + a_3(6c+1) + a_2(6d+1) + a_1(6e+1) + a_0$	1
	$= 6(a_5a + a_4b + a_3c + a_2d + a_1e) + (a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$	1
	Koska summan ensimmäinen termi on kuudella jaollinen, on koko summa ja siten myös luku n jaollinen kuudella täsmälleen silloin, kun numeroiden summa $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ on jaollinen kuudella.	1
	TAI:	
	Koska $7 \equiv 1 \pmod 6$, niin $7^n \equiv 1^n = 1 \pmod 6$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.	2
	Siten $a_5 \cdot 7^5 + a_4 \cdot 7^4 + a_3 \cdot 7^3 + a_2 \cdot 7^2 + a_1 \cdot 7 + a_0 \equiv$ $a_5 \cdot 1^5 + a_4 \cdot 1^4 + a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 =$	3
	$a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \pmod 6$. Väite on siten todistettu.	1

12. a)	Merkitään $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$. Tällöin $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$.	1
	Yhtälön $3x^2 + 4x + 10 = 0$ diskriminantti $D = 16 - 120 < 0$. Derivaatalla $f'(x)$ ei ole nollakohtia, joten funktio $f(x)$ on aidosti monotoninen. Alkuperäisellä yhtälöllä on siten korkeintaan yksi juuri.	1
	Koska $f(1) = -7 < 0$ ja $f(2) = 16 > 0$, niin juuria on täsmälleen yksi.	1
b)	Iteraatiokaava $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}$	1
	antaa $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}41176470588\ldots$, $x_2 = 1{,}36933647059\ldots$, $x_3 = 1{,}36880818862\ldots$, $x_4 = x_5 = 1{,}36880810782\ldots$.	1
	Neljäs kierros antaa siten jo vaaditun likiarvon.	1

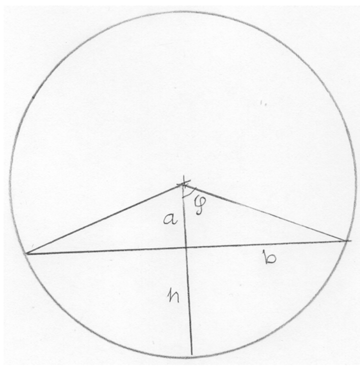
13. a)	Erotusosamäärä $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ $\qquad (h \neq 0)$	1
	$= \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{h}{1+\lvert h\rvert} = \dfrac{1}{1+\lvert h\rvert}$	1
	$\to 1 = f'(0)$ kun $h \to 0$. Väite on siten todistettu.	1
b)	Koska $f(x) = \dfrac{x}{1+\lvert x\rvert} = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & x>0 \\ \dfrac{x}{1-x}, & x<0 \end{cases}$, niin $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & x>0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2}, & x<0 \end{cases}$.	1
	Erotusosamäärää $\dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ tarkastellaan erikseen tapauksissa, kun $h>0$ ja $h<0$. a-kohdan mukaan $g(0) = f'(0) = 1$. Kun $h>0$, niin $g(h) = f'(h) = \dfrac{1}{(1+h)^2}$ ja erotusosamäärä on $\dfrac{1}{h} \cdot \left(\dfrac{1}{(1+h)^2} - 1 \right) = \dfrac{1-1-2h-h^2}{h(1+h)^2} = \dfrac{-2-h}{(1+h)^2} \to \dfrac{-2}{1} = -2$, kun $h \to 0+$.	1
	Kun $h<0$, niin $f'(h) = \dfrac{1}{(1-h)^2}$ ja erotusosamäärä on $\dfrac{\dfrac{1}{(1-h)^2} - 1}{h} = \dfrac{1-1+2h-h^2}{h(1-h)^2} = \dfrac{2-h}{(1-h)^2} \to \dfrac{2}{1} = 2$, kun $h \to 0-$. Koska toispuoleiset raja-arvot (toispuoleiset derivaatat) ovat erisuuret -2 ja 2, niin funktiolla $g(x)$ ei ole derivaattaa origossa.	1

***14. a)**	Jos molempiin näyttelyihin ilmoitettiin x koiraa, niin $31 + x + 43 = 1372$. Siis $x = 1298$.	1
	$P(L \text{ ja } S) = \frac{1298}{1372}$	1
	$= 0{,}94606... \approx 95\,\%$.	1
b)	Tapahtumat A ja B ovat riippumattomia, jos $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$.	2
c)	$P(L) \cdot P(S) = \frac{1329}{1372} \cdot \frac{1341}{1372} = 0{,}94677...$	1
	$\neq P(L \text{ ja } S)$, joten tapahtumat L ja S eivät ole riippumattomia.	1
d)	Riippumattomuusehto on b-kohdan mukaan $P(L \text{ ja } S) = P(L) \cdot P(S)$, eli $\dfrac{b}{a+b+c} = \dfrac{a+b}{a+b+c} \cdot \dfrac{b+c}{a+b+c} \Leftrightarrow b(a+b+c) = (a+b)(b+c)$	1
	$\Leftrightarrow ab + b^2 + bc = ab + ac + b^2 + bc \Leftrightarrow ac = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee c = 0$	1

***15. a)**	$\sum\limits_{k=1}^{1}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ $\sum\limits_{k=1}^{2}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$ $\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$ $\sum\limits_{k=1}^{4}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$ $\sum\limits_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{5}{6}$	1
	Arvaus on siten: $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$.	1
b)	$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{{}^{k+1)}A}{k}+\frac{{}^{k)}B}{k+1}=\frac{(A+B)k+A}{k(k+1)}$.	1
	Tämä toteutuu kaikilla $k\in\mathbf{Z}_+$, kun $\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$.	1
c)	$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$	1
	$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$	1
	$=1-\frac{1}{n+1}$	1
	$=\frac{n}{n+1}$. Arvaus on siten todistettu oikeaksi.	1
d)	$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{(n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$.	1



Kuvio 2



Kuvio 8