MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 23.3.2016
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

A-osa

1. (1 piste/kohta)

	Sanallinen muoto	1	2	3
A	Lausekkeen $1{,}1^3$ arvo on	1,13	3,3	1,331
B	Tilavuus 0,5 m^3 on sama kuin	50 l	500 l	5 000 l
C	Luvuista $\frac{2}{3}, \frac{6}{7}$ ja $\frac{16}{21}$ suurin on	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Luvun $-a+b$ vastaluku on	$b-a$	$a-b$	$-a-b$
E	Yhtälön $x^2-3x+1=0$ juurten summa on	3	4	5
F	Tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %, joten lopullinen hinta on … alkuperäisestä hinnasta.	99 %	100 %	101 %

Kohta	A	B	C	D	E	F
Vaihtoehdon numero	3	2	2	2	1	1

2. a)	$x-\left(2x^2-\left(3x-4x^2\right)\right)=x-2x^2+3x-4x^2=$	1
	$-6x^2+4x$	1
b)	Lukujen tulo on $\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\left(\sqrt{6}\right)^2}{3\cdot 2}=\frac{6}{6}=1$,	1
	joten ne ovat toistensa käänteislukuja.	1
c)	Koska molemmat puolet ovat positiivisia, voidaan epäyhtälö neliöidä puolittain, jolloin saadaan $a+b<a+b+2\sqrt{ab}$,	1
	joka on tosi, koska $2\sqrt{ab}>0$.	1

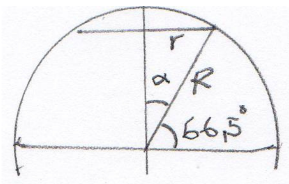
3. a)	$\left\|\overline{a}\right\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$	1
	$\left\|\overline{b}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$	1
	$\overline{a}\cdot\overline{b}=2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-7)=19$	1
b)	$\int_0^9\left(3+\sqrt{x}\right)dx=\Big/_0^9\left(3x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)=$	1+1
	$27+\frac{2}{3}\cdot 9\cdot 3=27+18=45$.	1

4. a)	Nollakohdat ovat $x=0$ ja $x=3$.	1+1
b)	Funktio on aidosti kasvava, kun $0 \le x < 5$.	2
c)	Minimikohta on $x=0$,	1
	koska derivaatan merkki muuttuu $- \to +$.	1

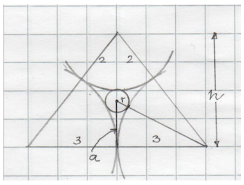
B1-osa

5. a)	$P(\text{voitto}) = p_v = \frac{1}{37}$, jolloin $P(\text{häviö}) = p_h = \frac{36}{37}$.	1
	Odotusarvo euroissa on siten $\frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ €.	1
b)	$p_v = \frac{3}{37}$ ja $p_h = \frac{34}{37}$	1
	Odotusarvo euroissa on siten $\frac{3}{37} \cdot 11 + \frac{34}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ €.	1
c)	$p_v = \frac{18}{37}$ ja $p_h = \frac{19}{37}$	1
	Odotusarvo euroissa on siten $\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ €.	1

6. a)	Maapallon keskisäde R = 6 371 km. Koska napapiirin leveysaste on noin 66,5, niin napapiirin ja pohjoissuunnan välinen kulma $\alpha = 90^\circ - 66{,}5^\circ = 23{,}5^\circ$. (Kuvio alla)	1
	Napapiirin säde on $r = R\sin\alpha (= 2540{,}4\ldots\text{km})$.	1
	Tunnelin AB pituus on $r\sqrt{2} = R\sqrt{2}\sin\alpha = 3592{,}7\ldots\text{km} \approx 3\,593$ km.	1
b)	Napapiirillä lyhyemmän kaaren AB pituus $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r =$	1
	$\frac{1}{2}\pi R \sin\alpha =$	1
	$3990{,}4\ldots\text{km} \approx 3\,990$ km.	1



7.	Alla olevassa kuviossa kolmion korkeus $h=\sqrt{5^2-3^2}=4$.	1
	Pikkuympyrän säde on r ja keskipisteen etäisyys kolmion kannasta $a=4-(2+r)=2-r$	2
	Pythagoras: $3^2+(2-r)^2=(3+r)^2$,	2
	josta $10r=4 \Leftrightarrow r=\frac{2}{5}$.	1



8. a)	Koska xy-tasossa $z=0$, on tason yhtälö muotoa $x+2y+kz=3$.	1
	Koska taso kulkee pisteen (2,4,6) kautta, niin pisteen koordinaatit toteuttavat sen yhtälön, eli $2+2\cdot 4+6k=3$, josta $k=-\frac{7}{6}$.	1
	Yhtälö on siten $x+2y-\frac{7}{6}z=3$ eli $6x+12y-7z=18$.	1
b)	x-akselilla $y=z=0$, joten $6x=18 \Leftrightarrow x=3$.	1
	y-akselilla $x=z=0$, joten $12y=18 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$.	1
	z-akselilla $x=y=0$, joten $-7z=18 \Leftrightarrow z=-\frac{18}{7}$.	1

9.1.	Palautuskaava luvun $\sqrt{20}$ laskemiseksi on $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{20}{x_n}\right)$, jossa $n=1,2,3,...$	2
	Iterointi: $x_1=1$ $x_2=10,5$ $x_3=6,2023...$ $x_4=4,7134...$ $x_5=4,4783...$	2
	Laskimella $\sqrt{20}\approx 4,47213596$.	1
	Vertailu: $\frac{x_4}{\sqrt{20}}=1,0013...$, joten suhteellinen virhe on noin 0,1 %.	1

9.2.	Koska $f(0)=0$, niin	1
	erotusosamäärä $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=$	1
	$\dfrac{h^2 g(h)}{h}=hg(h)$.	1
	Koska $\lvert g(h)\rvert \le 20$ kaikilla h, niin	1
	$\lim\limits_{h\to 0} hg(h)=0$,	1
	joten f on derivoituva kohdassa $x=0$ ja $f'(0)=0$.	1

B2-osa

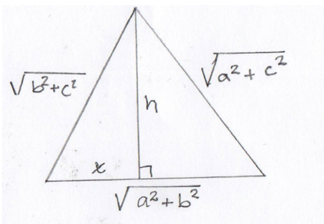
10. a)	Koska kaikki luvun 6 potenssit päättyvät kuutoseen, niin tekevät myös kaikki luvun 2016 potenssit. Viimeinen numero on siten 6.	2
b)	Koska $x=2016^{2016}$, niin $\lg x = 2016\cdot \lg 2016 = 6661{,}8529...$, josta $x=10^{6661{,}8529...}$	1
	$=10^{0{,}8529...}\cdot 10^{6661}=7{,}1269...\cdot 10^{6661}$, joten kaksi ensimmäistä numeroa ovat 7 ja 1.	1
c)	Koska $\lg x = 6661{,}8529...$, niin luvussa on 6661 + 1 = 6 662 numeroa.	2

11.	Tölkin pohjaympyrän säde on r ja korkeus h. Tilavuusehto antaa $\pi r^2 h = 1000$, josta $h=\frac{1000}{\pi r^2}$.	1
	Vaippapellin hinta on 1 €/m² ja pohjapellin 2 €/m². Pellin kokonaishinta on $H(r)=2\pi r^2\cdot 2+2\pi r h\cdot 1=$	1
	$4\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{1000}{\pi r^2}=4\pi r^2+\frac{2000}{r}$, jossa $r>0$.	1
	$A'(r)=8\pi r-\frac{2000}{r^2}=0 \Leftrightarrow 8\pi r^3-2000=0$ $\Leftrightarrow \pi r^3=250 \Leftrightarrow r^3=\frac{250}{\pi}\Leftrightarrow r=5\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$	1
	Derivaatan $H'(r)$ merkkikaavio osoittaa, että saatu r on minimikohta ja siten myös halvimman tölkin pohjan säde.	1
	Kysytty suhde on $\dfrac{h}{2r}=\dfrac{1000}{\pi r^2\cdot 2r}=\dfrac{500}{\pi r^3}=\dfrac{500}{250}=2$.	1

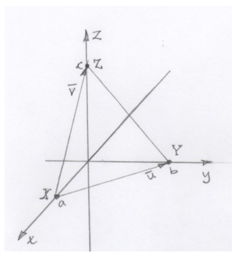
12. a)	Sinifunktion kuvaajan perusteella havaitaan, että $\int_0^{\pi} \sin t\, dt = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\, dt$.	1
	Tällöin $f(\pi) = \int_0^{\pi} \lvert\sin t\rvert dt = \int_{\pi}^{2\pi} \lvert\sin t\rvert dt$.	1
	Näin ollen $f(2\pi) = \int_0^{\pi} \lvert\sin t\rvert dt + \int_{\pi}^{2\pi} \lvert\sin t\rvert dt = 2 \cdot \int_0^{\pi} \lvert\sin t\rvert dt = 2f(\pi)$.	1
b)	Kun $0 \le t \le \pi$, niin $\lvert\sin t\rvert = \sin t$.	
	Nyt $\int_0^x \lvert\sin t\rvert dt = \int_0^x \sin t\, dt = \Big/_0^x (-\cos t) = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$, kun $0 \le x \le \pi$.	1
	Kun $\pi \le t \le 2\pi$, niin $\lvert\sin t\rvert = -\sin t$.	
	Nyt $\int_0^x \lvert\sin t\rvert dt = \int_0^{\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^x (-\sin t) dt =$	1
	$\Big/_0^{\pi} (-\cos t) + \Big/_{\pi}^x \cos t = -\cos \pi + \cos 0 + \cos x - \cos \pi = 3 + \cos x$, kun $\pi \le x \le 2\pi$.	1
	Vastaus: $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & 0 \le x \le \pi \\ 3 + \cos x, & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$	

13.	Tetraedrin pohjakolmion sivut ovat $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{b^2+c^2}$ ja $\sqrt{a^2+c^2}$.	1
	Kuvion 1 merkinnöin: $\begin{cases} x^2 + h^2 = b^2 + c^2 \\ \left(\sqrt{a^2+b^2} - x\right)^2 + h^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$	1
	Vähentämällä yhtälöt puolittain: $x^2 - a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2+b^2} - x^2 = b^2 - a^2$, josta $x = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.	1
	Tällöin $h = \sqrt{b^2 + c^2 - x^2} = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{b^4}{a^2+b^2}} =$ $\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2) - b^4}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2+b^2}}$.	1
	$D = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\, h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$.	1
	Koska akselitasoissa olevien kolmioiden alat ovat $A = \frac{1}{2}bc$, $B = \frac{1}{2}ac$ ja $C = \frac{1}{2}ab$, niin $A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{4}\left(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2\right) = D^2$.	1

	TAI:	
	Jos tetraedrin huippu on origossa, niin sen pohjatason yhtälö on $T: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,	1
	josta kertomalla puolittain lausekkeella abc saadaan yhtälö $bcx+acy+abz=abc$.	1
	Origon etäisyys tasosta T = tetraedrin korkeus $h=\frac{\lvert a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0-abc\rvert}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$	1
	Koska tetraedrin tilavuus on toisaalta $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot ab\cdot c=\frac{1}{6}abc$, niin saadaan yhtälö $\frac{1}{3}D\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=\frac{1}{6}abc$,	1
	josta $D=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$.	1
	Koska akselitasoissa olevien kolmioiden alat ovat $A=\frac{1}{2}bc,\ B=\frac{1}{2}ac$ ja $C=\frac{1}{2}ab$, niin $A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)=D^2$.	1
	TAI:	
	Muodostetaan tetraedrin kärkiä yhdistävät vektorit $\overrightarrow{XY}=\bar{u}=-a\bar{i}+b\bar{j}$ ja $\overrightarrow{XZ}=\bar{v}=-a\bar{i}+c\bar{k}$. (Kuvio 2)	1
	Tällöin $\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=bc\bar{i}+ac\bar{j}+ab\bar{k}$.	2
	Kolmion XYZ pinta-ala on $D=\frac{1}{2}\lvert\bar{u}\times\bar{v}\rvert=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$.	2
	Koska akselitasoissa olevien kolmioiden alat ovat $A=\frac{1}{2}bc,\ B=\frac{1}{2}ac$ ja $C=\frac{1}{2}ab$, niin $A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4}\left(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2\right)=D^2$.	1



Kuvio 1



Kuvio 2