YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 22.3.2017
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

Sijoitus ratkaisukaavaan $\frac{7\pm\sqrt{7^2+4\cdot2\cdot4}}{4}$ TAI toinen juuri löydetty	1
$x=-\frac{1}{2}$ tai $x=4$	1
vertaamalla kertoimia $2a=14$ ja $a^2=b$	1
$\Rightarrow a=7$ ja $b=49$	1
$c=\frac{2}{3}$ ja $d=-\frac{5}{3}$	1
$x=2\frac{1}{2}$	1

2.

Vastauksesta 1 p. kustakin kohdasta	
D, A, B	
D, C, E	

3.

Pituuden minimi saavutetaan pisteessä, jossa $\overline{c}_t$ on kohtisuorassa vektorin	
$\overline{d}=\overline{b}-\overline{a}$ kanssa tai päätepisteessä	1
$\overline{d}=\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$	1
$\overline{d}\cdot\overline{a}=1-4+6=3$ ja $\overline{d}\cdot\overline{b}=2+0+10=12$	1
Siten $\overline{c}_t\cdot\overline{d}=3t+12(1-t)$	1
Ratkaisemalla nollakohta $t=\frac{4}{3}$	1
Koska $-2\leqslant\frac{4}{3}\leqslant2$ saavutetaan minimi tällä parametrin arvolla eikä päätepisteessä.	1
TAI	
$\overline{c}_t=(t+2(1-t))\overline{i}+2t\overline{j}+(3t+5(1-t))\overline{k}$	1
$=(2-t)\overline{i}+2t\overline{j}+(5-2t)\overline{k}$	
$\lvert\overline{c}_t\rvert^2=(2-t)^2+(2t)^2+(5-2t)^2$	1
$=9t^2-24t+29$	1
Derivaatta $18t-24$	1
Nollakohta $t=\frac{4}{3}$	1
Merkkikaavio tai reunatarkastelu	1

4.

$\frac{\ln y}{\ln 4}=\frac{\ln x}{\ln 2}$	1
$\Rightarrow \ln y=\frac{\ln 4}{\ln 2}\ln x=2\ln x$	1
$\Rightarrow y=x^2$	1
Hahmotelma kuvaajasta $y=x^2$, jossa rajat $x=2$ ja $x=3$ sekä alue merkitty	1
Pinta-ala saadaan kaavalla $\int_2^3 x^2\,dx$	1
$=\Big/_2^3\frac{1}{3}x^3=\frac{27-8}{3}=\frac{19}{3}$.	1

B1-osa

5.	Kun $x \leqslant 1$, on $\lvert x-1\rvert = 1-x$, joten $f(x) = 2-x$.	1 1
	Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kaavasta $\pi\int_0^2 f(x)^2\,dx$. Lasketaan $\int_0^1 (2-x)^2\,dx = -\big/_0^1 \frac{1}{3}(2-x)^3 = \frac{7}{3}$ ja $\int_1^2 x^2\,dx = -\big/_1^2 \frac{1}{3}x^3 = \frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ tilavuus on $\frac{14\pi}{3}$.	 1 2 1

6.	Kolmion A_1 pidemmän kateetin pituus on $s\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}s}{2}$. Kolmio, josta on poistettu A_1, on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa, skaalauskertoimella $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Iteroimalla, kun kolmiosta on poistettu $A_1, \ldots, A_n$, on jäljellä kolmio jonka lyhyt kateetti on $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n s$. Yhdenmuotoisuuden nojalla sen pinta-ala on $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n}$ -osa alkuperäisestä pinta-alasta. Ratkaistaan siis yhtälö $(\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n} = 0{,}03$ $\Rightarrow$ ratkaisu 12,189 joten $n = 13$	1 1 1 1 1 1
	$n = 12$ Voi laskea myös geometrisena summana.	-1

7.	Merkitään sisäsädettä r ja sisäkorkeutta h (mm). Tilavuusehdosta saadaan $\pi r^2 h = 200000$ (mm^3). Pohjan tilavuus $\pi(r+2)^2 \cdot 5$ Seinämän tilavuus $\pi[(r+2)^2 - r^2]h$ Minimoitava lauseke on $\pi(4r+4)\frac{200000}{\pi r^2} + 5\pi(r+2)^2$. Derivaatta $800000(-r^{-2} - 2r^{-3}) + 10\pi(r+2) = (r+2)(10\pi r^3 - 800000)r^{-3}$ $\Rightarrow$ minimi saavutetaan kun $r \approx \sqrt[3]{\frac{800000}{10\pi}} \approx 29{,}420$. Halkaisija on siten $2(r+2) \approx 62{,}84$ ja korkeus $h + 5 \approx 78{,}55$.	1 1 1 1 1 1
	Minimointi laskimella	-0

8.	Graafinen tarkastelu tai taulukointi osoittaa, että lähin nollakohta on välillä $-1 < x < 0$. (Lisäksi alkupisteen valinta $x_0 = -1$ johtaa toiseen nollakohtaan.) Sopivasti valittu alkupiste, esim. $x_0 = -0{,}5$ Newtonin menetelmän ensimmäinen iteraatio Newtonin menetelmän iteraatiot siihen asti, että neljä desimaalia pysyy samana. $\Rightarrow$ Vastaus: $x \approx -0{,}442546229 \approx -0{,}4425$	1 1 1 1 1 1

9.	Tutkitaan ensin tapausta, jossa luvuista p, q ja r vähintään 2 on parillisia. Kahden parillisen luvun summa on parillinen, joten tulo $(p+q)(q+r)(r+p)$ on parillinen. Tutkitaan sitten tapausta, jossa luvuista p, q ja r vähintään 2 on paritonta. Kahden parittoman luvun summa on parillinen, joten tulo $(p+q)(q+r)(r+p)$ on parillinen.	1 2 1 2

B2-osa

10.

Marin vastaus on oikea.	1
Elmeri ei ole ottanut huomioon sisäfunktion derivaattaa.	1
Oikea kaava on $h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 4e^x e^x = 4e^{2x}$.	1
Uolevi on laskenut potenssit väärin.	1
$(e^x)^2 = e^{2x}$, joten $h(x) = 2e^{2x} + 1$,	1
josta sisäfunktion derivaatan avulla $h'(x) = 4e^{2x}$.	1

11.

Koska arvosanan 9 ylittäviä arvosanoja on selvästi enemmän kuin sen alittavia, päätellään, että keskiarvo on yli 9.	1
Toisaalta, koska 9 on tavallisempi arvosana kuin 10, on keskiarvo alle 9,5.	1
Arvosanojen 8 painolla keskiarvon pitää siis olla $9\frac{1}{4}$ eli ”9+”.	1
Jakaumaksi käy esimerkiksi (5, 10, 80, 5) prosenttia arvosanoille 7–10. Nyt keskiarvo on vähän alle 9, ja 85 prosenttia vastaajista on tätä parempia.	3

12.

Kolmion sivut ovat $\sqrt{2}s$, $\sqrt{9}s$ ja $\sqrt{11}s$.	1
Neliön N_2 pinta-ala on $2s^2$.	1
Koska $9 + 2 = 11$, seuraa Pythagoraan lauseesta, että kolmio on suorakulmainen.	2
Kolmion pinta-ala on siten $\frac{\sqrt{2}s \cdot \sqrt{9}s}{2} = \frac{3\sqrt{2}s^2}{2}$	1
$\Rightarrow$ kysytty suhde on $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.	1

13.

Valitaan (esimerkiksi) a_k niin, että $\sin(\frac{1}{a_k}) = 0$ jokaisella k	1
eli $\frac{1}{a_k}$ on π:n monikerta.	1
Valinnalla $a_k = \frac{1}{\pi k}$ pätee $a_k \to 0$ ja $\lim \sin(\frac{1}{a_k}) = \lim 0 = 0$.	1
Valitaan (esimerkiksi) a_k niin, että $\sin(\frac{1}{a_k}) = \sin(t)$ jokaisella k	1
eli $\frac{1}{a_k}$ on muotoa $t + 2\pi n$ jollain luonnollisella luvulla n.	1
Valinnalla $a_k = \frac{1}{t+2\pi k}$ pätee $a_k \to 0$ ja $\lim \sin(\frac{1}{a_k}) = \lim \sin(t) = \sin(t)$.	1