YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

26.3.2018

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko ja mahdolliset A-osan erilliset vastausarkit on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

Lukion numero

Lukion nimi

Kokelaan sukunimi ja kaikki etunimet selvästi kirjoitettuna

Kokelaan numero

Kokelaan nimikirjoitus

1. Merkitään $f(x) = x^3 - x$. Laske **a)** $f(-2)$, **b)** $f'(3)$ ja **c)** $\int_0^4 f(x)\,dx$.

2. Toisen asteen polynomifunktiolle voidaan käyttää kahta erilaista esitystapaa.

$$\text{Summamuoto:} \quad ax^2 + bx + c.$$
$$\text{Tulomuoto:} \quad a(x - x_1)(x - x_2).$$

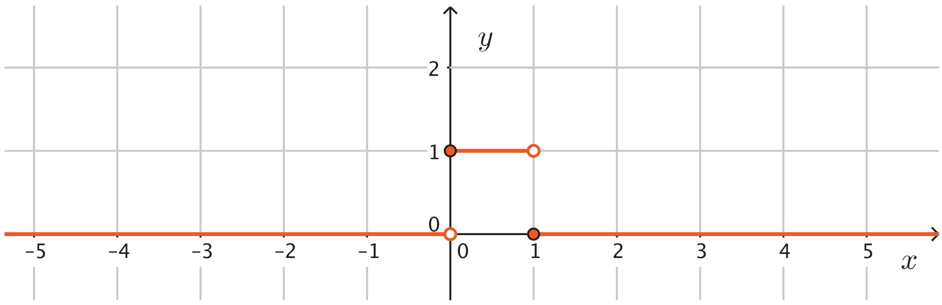
a) Muokkaa polynomi $2(x-6)(x-9)$ summamuotoon.

b) Muokkaa polynomi $x^2 + x - 12$ tulomuotoon.

c) Osoita, että $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, jos x_1 ja x_2 ovat polynomin $ax^2 + bx + c$ nollakohdat.

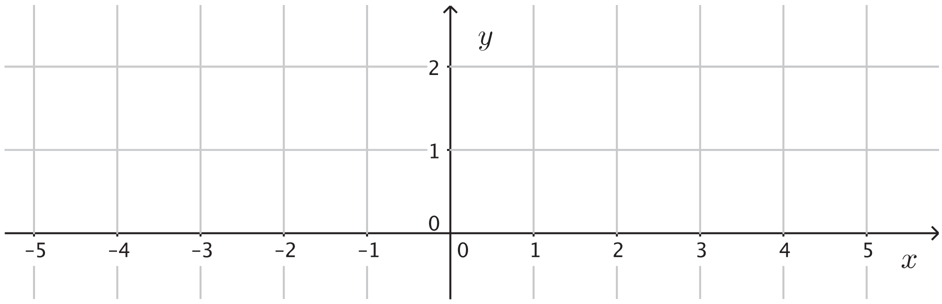
3. Määritä funktion $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ suurin ja pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 2\pi$.

4. Ikkunafunktioiden avulla voidaan kuvata esimerkiksi ajastimen toimintaa. Oheisessa kuviossa on erään tällaisen funktion $f(x)$ kuvaaja punaisella piirrettynä.

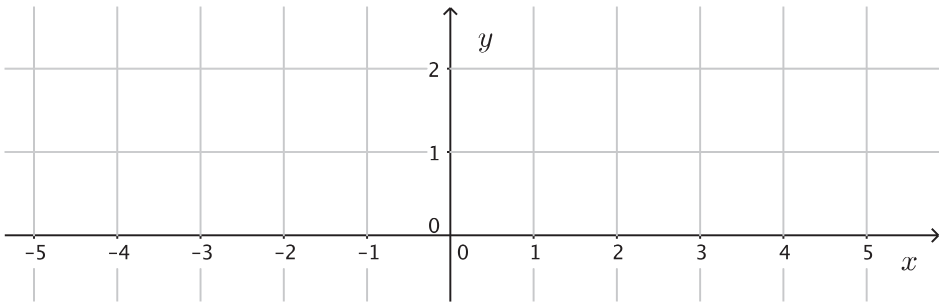


Piirrä alla oleviin koordinaatistoihin annettujen funktioiden kuvaajat välillä $-2 \leq x \leq 3$. Perusteluja ei vaadita.

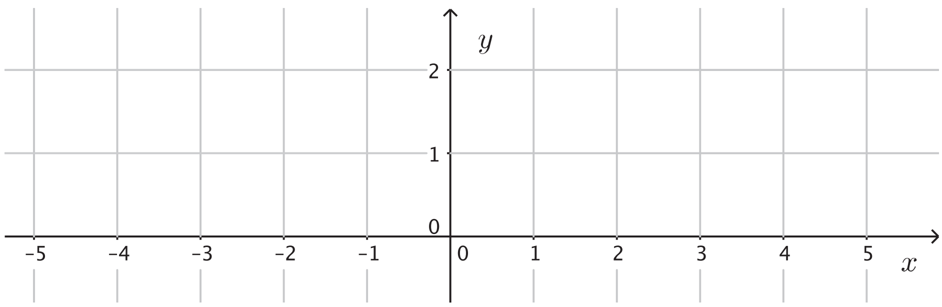
a) $g(x) = 2f(x)$



b) $h(x) = xf(x)$



c) $k(x) = f(x + \frac{3}{2})$



YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

26.3.2018

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

B-osa

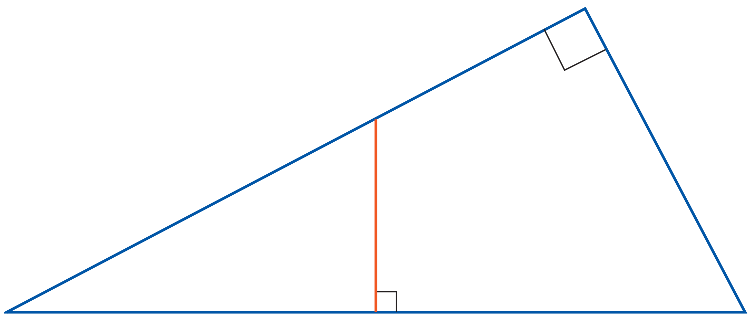
B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Jos teet tehtävän 5, kirjoita sen ratkaisu kokoarkille. Muussa tapauksessa kirjoita kokoarkille vain nimitietosi. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Puoliarkit kootaan kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. **a)** Muodosta sen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on $(2, 1)$ ja säde 2. Laske ympyrän niiden pisteiden y-koordinaatit, joiden x-koordinaatti on 1.

b) Määritä a-kohdan ympyrän pienin etäisyys suorasta $3y = 4x + 20$.

6. Suorakulmaisen kolmion toinen terävä kulma on 30 astetta. Kolmion hypotenuusan keskipisteeseen piirretään kuvion mukaisesti kohtisuora jana, jonka toinen päätepiste sijaitsee kolmion kateetilla. Laske niiden kahden osan pituuksien suhde, joihin kohtisuora jakaa kateetin.



7. Lotto-peli alkoi Suomessa vuonna 1971, ja sen sääntöjä on muutettu useita kertoja vuosien varrella. Viimeisin sääntöuudistus tehtiin vuoden 2016 lopussa.

Ennen uudistusta arvottiin 7 varsinaista ja 2 lisänumeroa 39 numerosta. Uudistuksen jälkeen arvotaan 7 varsinaista ja vain 1 lisänumero 40 numerosta. Seuraavassa loton pelaaja täyttää yhden lottorivin eli käytännössä valitsee 7 numeroa.

Laske tuloksen "6 + 1" todennäköisyys ennen uudistusta ja sen jälkeen. Tässä "6 + 1" tarkoittaa tulosta, jossa on kuusi varsinaista ja yksi lisänumero oikein.

Lähde: <www.veikkaus.fi>. Luettu 5.2.2017.

8. Jyrki on 23-vuotias, ja hänellä on kolme nuorempaa sisarusta, joiden ikien tulo on 156. Minkä ikäisiä Jyrkin sisarukset ovat? Esitä kaikki kokonaislukuratkaisut.

9. Tarkastellaan funktiota, jonka derivaattafunktio on myös derivoituva. Soveltamalla Newtonin menetelmää derivaattafunktioon saadaan selville funktion mahdollisen paikallisen ääriarvokohdan likiarvo.

Selvitä Newtonin menetelmällä funktion

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^2 + x$$

mahdolliset ääriarvokohdat välillä $]0, 2[$. Käytä alkuarvoa 0,5, laske kolme iteraatiota ja anna tulos viiden merkitsevän numeron tarkkuudella. Laske toinen mahdollinen ääriarvokohta samalla tavalla alkuarvoa 1,5 käyttäen. Määritä näiden tulosten avulla funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvot välillä $]0, 2[$ neljän merkitsevän numeron tarkkuudella.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Annukka ja Fareed yrittävät laskea seuraavien vektoreiden pistetulon ilman laskinta:

$$\overline{u} = 7\cos\tfrac{\pi}{5}\,\overline{i} + 7\sin\tfrac{\pi}{5}\,\overline{j} \quad \text{ja} \quad \overline{v} = 3\cos\tfrac{8\pi}{15}\,\overline{i} + 3\sin\tfrac{8\pi}{15}\,\overline{j}.$$

Heidän ratkaisunsa ovat seuraavat.

Annukan ratkaisu	Fareedin ratkaisu
$\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\big(\cos\frac{\pi}{5}\,\overline{i}+\sin\frac{\pi}{5}\,\overline{j}\,\big)\cdot 3\big(\cos\frac{8\pi}{15}\,\overline{i}+\sin\frac{8\pi}{15}\,\overline{j}\,\big)$	Vektorien pituudet: $\lvert\overline{u}\rvert = 7$ ja $\lvert\overline{v}\rvert = 3$
$= 21(\cos\frac{\pi}{5}\ \cos\frac{8\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{5}\ \sin\frac{8\pi}{15})$	Pistetulon kaava: $\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\cdot 3\cos(\overline{u},\overline{v})$
$= 21\cos(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5})$	Vektorien välinen kulma: $\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}$
$= 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$.	Siten $\overline{u}\cdot\overline{v} = 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$.

a) Annukka ja Fareed ovat käyttäneet eri kaavoja pistetulon laskemiseksi. Esitä nämä kaavat yleisille vektoreille $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j}$ ja $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j}$.

b) Fareed on laskenut vektorien pituudet ja niiden välisen kulman. Esitä vektorit graafisesti ja merkitse kuvaan, miten Fareed on päätellyt vektorien välisen kulman.

c) Selitä lyhyesti rivi riviltä, miten Annukan ratkaisu etenee.

11. a) Anna esimerkki rationaalifunktiosta $f(x)$, jolle epäyhtälö $f(x) \geq 2$ toteutuu täsmälleen silloin, kun $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$.

b) Anna esimerkki funktiosta $g(x) \geq 0$, joka on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja jonka derivaatalla on täsmälleen kaksi nollakohtaa.

12. a) Olkoon $a > 0$. Määritellään a-kantainen logaritmi funktion $f(x) = a^x$ käänteisfunktiona, toisin sanoen $\log_a x = f^{-1}(x)$. Kiinnitetään $x > 1$ ja määritellään $g(a) = \log_a x$. Osoita, että funktio $g(a)$ on vähenevä.

b) Olkoon $h(t)$ jatkuva funktio. Osoita, että

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt$$

on kasvava täsmälleen silloin, kun $h(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$.

13. Funktio $f(x)$ määritellään kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} p(x)\cos(\frac{1}{x}), & \text{kun } x > 0, \\ \ln(1-x), & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

missä $p(x) = ax^2 + c$ on toisen asteen polynomi. Onko olemassa sellaisia kertoimia a ja c, että $f(x)$ on derivoituva?