YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 26.3.2018
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.	$f(-2) = (-2)^3 - (-2)$ $= -8 + 2 = -6$	1 1
	$f'(x) = 3x^2 - 1$ $\Rightarrow f'(3) = 3^3 - 1 = 26$	1 1
	$\int_0^4 f(x)\,dx = \Big/_0^4 \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ $= \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{2}4^2 = 4^3 - 8 = 56$	1 1

2.	$2(x-6)(x-9) = 2x^2 - 2\cdot 6x - 2\cdot 9x + 2\cdot 6\cdot 9$ $= 2x^2 - 30x + 108$	1 1
	$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$ tai $x = -4$ $\Rightarrow (x-3)(x+4)$	1 1
	$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ jollakin a:n arvolla. Kertomalla auki saadaan: $p(x) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$. Toisaalta $p(x) = ax^2 + bx + c$, joten vakiotermejä vertailemalla saadaan $ax_1x_2 = c$ eli $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.	1 1

3.	$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$ $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x$ $\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, joista välille kuuluvat $\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{7\pi}{6}$. $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ ja $f(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -2$ Toisaalta $f(0) = \sqrt{3}$ ja $f(2\pi) = \sqrt{3}$, joten ääriarvot ovat ± 2.	1 1 1 1 1 1
	TAI	
	$f(x) = (\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}) \cdot (\sin x\,\bar{i} + \cos x\,\bar{j})$ $(\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}) = 2(\frac{1}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j})$ $= 2(\sin\frac{\pi}{6}\,\bar{i} + \cos\frac{\pi}{6}\bar{j})$ $\Rightarrow f(x) = 2(\sin x \sin\frac{\pi}{6} + \cos x \cos\frac{\pi}{6})$ $= 2\cos(x + \frac{\pi}{6})$ Siten ääriarvot ovat ± 2.	1 1 1 1 1 1

4.	Funktion kuvaaja on paloittain jatkuva. Arvo 2 välillä [0,1[, muualla 0.	1 1
	Funktion arvo on x välillä [0,1[, muualla 0.	2
	Funktion kuvaaja on paloittain jatkuva. Funktion arvo on 1 välillä $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[$, muualla 0.	1 1

B1-osa

5.	$(x-2)^2+(y-1)^2=4$	1
	$x=1 \Rightarrow (y-1)^2=4-1=3$	1
	$\Rightarrow y=1\pm\sqrt{3}$	1
	Piste (−2,4) on lähin piste suoralla, sillä suoran normaali tässä pisteessä kulkee pisteen (2,1) kautta.	1
	Keskipisteen etäisyys suorasta $\lvert(2,1)-(-2,4)\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=5$	1
	Ympyrän etäisyys suorasta on siten $5-2=3$.	1

6.	Suhde säilyy mittakaavan muutoksissa, joten voimme olettaa, että hypotenuusan pituus on 2.	1
	Terävän kulman viereisen kateetin osan pituus on silloin $\frac{1}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.	1
	Koko kateetin pituus on $2\cos 30^\circ=\sqrt{3}$.	1
	Kateetin toisen osan pituus on siten $\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
	$=\sqrt{3}(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}$.	1
	Kysytty suhde on siis $\frac{2}{\sqrt{3}}/\frac{1}{\sqrt{3}}=2$.	1
	Vastaus $\frac{1}{2}$	−0

7.	Seitsemästä varsinaisesta numerosta voidaan valita kuusi seitsemällä tavalla; kahdesta lisänumerosta voidaan valita yksi kahdella tavalla ja yhdestä lisänumerosta yhdella tavalla.	1
	Mahdollisia 6+1-rivejä on ennen uudistusta $7\cdot 2$ ja uudistuksen jälkeen 7 kappaletta.	1
	Kaikkiaan arvontatuloksia on $\binom{39}{7}\binom{32}{2}$ ja $\binom{40}{7}\binom{33}{1}$.	1+1
	Todennäköisyydet ovat siis $\frac{14}{\binom{39}{7}\binom{32}{2}}=\frac{7}{3814472376}=1{,}83511\ldots\cdot 10^{-9}$ ennen uudistusta ja $\frac{7}{\binom{40}{7}\binom{33}{1}}=\frac{7}{615237480}=1{,}13777\ldots\cdot 10^{-8}$ uudistuksen jälkeen.	1+1

8.	$156=2^2\cdot 3\cdot 13$	1
	Luvun tekijät ja siten sisarusten mahdolliset iät ovat 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78 ja 156.	1
	Koska kyseessä ovat nuoremmat sisarukset, ainoastaan luvut 1, 2, 3, 4, 6, 12 ja 13 ovat mahdollisia.	1
	Tekijä 13 esiintyy kerran, joten yksi sisaruksista on 13-vuotias.	1
	Kahden muun iän tulo on 12	1
	$\Rightarrow$ muut mahdolliset iät ovat 1 ja 12, 2 ja 6 tai 3 ja 4.	1

9.	$g(x)=f'(x)=x^4-4x+1$	1
	Selvitetään $g(x)=0$, ja lasketaan sitä varten $g'(x)=4x^3-4$.	1
	Iteraatiokaava	1
	Iteraatio alkuarvolla 0,5 (0,2321428571, 0,2509614668, 0,2509921574) $\Rightarrow$ 0,25099	1
	Iteraatio alkuarvolla 1,5 (1,493421053, 1,493358562, 1,493358557) $\Rightarrow$ 1,4934	1
	Koska f on jatkuvasti derivoituva funktio, ovat ääriarvot avoimella välillä derivaatan nollakohdissa: $f(0{,}25099)=0{,}125197\ldots\approx 0{,}1252$ ja $f(1{,}4934)=-1{,}48145\ldots\approx -1{,}481$.	1

B2-osa

10.

Annukka on käyttänyt kaavaa $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$. Fareed on käyttänyt kaavaa $a \cdot b = \lvert a \rvert \, \lvert b \rvert \, \cos(a,b)$.	1 1
Kuva, josta näkyy, että vektorien u ja v kulmat x-akselin kanssa ovat $\frac{\pi}{5}$ ja $\frac{8\pi}{15}$ ja vektorien pituudet ovat 7 ja 3. Vektorien u ja v välisen terävän kulman suuruudeksi on merkitty $\frac{\pi}{3}$.	1 1
Ensimmäisellä rivillä Annukka on sijoittanut vektoreiden komponentit sekä ottanut luvut 7 ja 3 yhteisiksi tekijöiksi. Toisella rivillä hän on käyttänyt kaavaa $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$. Kolmannella rivillä hän on käyttänyt kaavaa $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. Neljännellä rivillä hän on laskenut kosinin argumentin ja sen jälkeen kosinin arvon.	1 1

11.

Valitaan ensin polynomi jonka nollakohdat ovat -1, 0, 1 ja 2, eli esimerkiksi $x(x+1)(x-1)(x-2)$. Kun $\lvert x \rvert$ on suuri, tämä on positiivinen, eli polynomin kuvaaja on W-muotoinen, joten kerrotomalla se luvulla -1 saadaan funktio, joka on positiivinen täsmälleen vaadituilla väleillä. Lisätään polynomiin 2, jolloin saadaan $f(x) = 2 - x(x+1)(x-1)(x-2)$. (Myös muunlaiset esimerkit ovat mahdollisia.)	1 1 1
Voidaan esimerkiksi etsiä ei-negatiivista funktiota, jolla on yksi minimi ja yksi maksimi. Funktion $g(x) = x^2 e^x$ derivaatta on $g'(x) = (x^2 + 2x)e^x$, jonka nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -2$. Toinen vaihtoehto on etsiä polynomia, jolla on minimi ja terassikohta. Derivaatta voisi olla esimerkiksi $12x(x-1)^2$, jolloin integroimalla saadaan $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.	3

12.

Olkoon $a < b$. On siis osoitettava, että $g(a) > g(b)$. $g(a) > g(b) \Leftrightarrow \log_a x > \log_b x \Leftrightarrow f_a^{-1}(x) > f_b^{-1}(x)$ Merkitään $x = f_a(y)$, sijoitetaan se edelliseen epäyhtälöön ja sovelletaan kasvavaa funktiota f_b kummallekin puolelle: $f_a^{-1}(x) > f_b^{-1}(x) \Leftrightarrow f_b(y) > f_a(y) \Leftrightarrow b^y > a^y$. Koska $y > 1$ ja $b > a$, viimeinen epäyhtälö pätee. TAI derivaatalla	1 1 1
Olkoon $x < y$. Nyt $H(y) - H(x) = \int_x^y h(t)\,dt$. Jos $h \geqslant 0$, seuraa, että $H(y) - H(x) \geqslant 0$, eli H on kasvava. Jos $h < 0$ jollakin välillä $[c,d]$, niin $H(d) - H(c) = \int_c^d h(t)\,dt < 0$, joten H ei ole kasvava.	1 1 1

13.	f on derivoituva kaikissa pisteissä $x \neq 0$.	1
	Vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä $x = 0$ saadaan normaalisti:	
	$D\ln(1-x) = \frac{1}{x-1} \to -1$, kun $x \to 0-$.	1
	Oikeanpuoleinen derivaatta lasketaan osamäärällä $\frac{p(x)\cos\frac{1}{x} - f(0)}{x} = \frac{p(x)}{x}\cos\frac{1}{x}$.	1
	Jos $p(0) \neq 0$, niin $\frac{p(x)}{x} \to \pm\infty$, eikä raja-arvoa ole, eikä siten myöskään oikeanpuoleista derivaattaa.	1
	Jos $p(0) = 0$, eli $c = 0$, niin $\frac{p(x)}{x} = ax \to 0$, kun $x \to 0$.	1
	Koska $ax\cos\frac{1}{x} \to 0$, niin oikeanpuoleinen derivaatta on olemassa ja sen arvo on 0. Koska vasemmanpuoleisen derivaatan arvo on -1, ei funktio kuitenkaan ole derivoituva. Vaadittuja kertoimia ei siis ole olemassa.	1