YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA | 26.3.1999 | MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Tehtävissä 5, 6, 7, 9 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Ratkaise yhtälöt $\mathbf{1}^\circ$ $(2x+1)(1-2x)(x+1)=0$, $\mathbf{2}^\circ$ $(2x+1)(1-2x)(x+1)=1$.

2. Vuonna 1996 erään yrityksen tutkimus- ja tuotekehitysmenot olivat 12,0 % liikevaihdosta. Seuraavana vuonna niiden osuus liikevaihdosta oli laskenut kahdella prosenttiyksiköllä. Kuitenkin tutkimus- ja tuotekehitysmenojen markkamäärä oli vuonna 1997 noussut 14 % vuoden 1996 määrään verrattuna. Kuinka monta prosenttia yrityksen liikevaihto vuonna 1997 kasvoi edelliseen vuoteen verrattuna?

3. Tasakylkisen kolmion kantakulman sini on $\frac{1}{3}$. Laske huippukulman kosinin tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

4. Muodosta funktion $f(x)=e^{-\frac{1}{2}(x-\frac{3}{4})^2}$ derivaatta ja tutki, millä x:n arvoilla se on negatiivinen.

5. **a)** Moottorisahan öljyä myydään 1 litran ja 3 litran muovipulloissa. Pullot ovat samanmuotoiset, ja pullojen muovimäärä on suoraan verrannollinen niiden pinta-alaan. Kuinka moninkertainen muovimäärä on 3 litran pullossa 1 litran pulloon verrattuna? Kuinka monta prosenttia vähemmän 3 litran pullossa on käytetty muovia öljylitraa kohti kuin 1 litran pullossa?

b) Oletetaan, että eräässä kunnassa syntyy ensi vuonna 60 lasta. Lasten sukupuolet ovat toisistaan riippumattomia, ja pojan syntymistodennäköisyys on $0,513$. Mitä jakaumaa tyttöjen ja poikien lukumäärät noudattavat? Mikä on poikien ja mikä tyttöjen lukumäärän odotusarvo? Millä todennäköisyydellä syntyy täsmälleen yhtä monta tyttöä ja poikaa?

6. **a)** Olkoot a, b ja c reaalilukuja. Johda ratkaisukaava yhtälön $ax^2+bx+c=0$ kaikille reaaliratkaisuille. (Huomaa myös tapaus $a=0$ ja muut erikoistapaukset.)

b) Polttomoottorin mäntä suorittaa yhden kierroksen aikana edestakaisen liikkeen ylhäältä alas ja takaisin. Auton moottorin kierroslukumittarin osoittaessa 4000 kierrosta minuutissa auton pyörä pyörähtää 780 kierrosta minuutissa. Pyörän halkaisija on 73 cm. Moottorin männän ylhäältä alas kulkema matka eli iskun pituus on 70 mm. Kun autolla ajetaan 60 km, kuinka pitkän matkan mäntä kaiken kaikkiaan kulkee liikkuessaan edestakaisin?

KÄÄNNÄ!

7. **a)** Kappale liikkuu pitkin reaaliakselia, ja hetkellä $t \geq 0$ sen paikka on pisteessä $x(t) = t^2 + |1-t|$. Milloin kappale on lähinnä origoa? Missä pisteissä kappale on käynyt aikavälillä $[0,2]$?

b) Koordinaatistossa, jonka origo on O, on annettu vektorit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$. Pisteet A, B ja C muodostavat kolmion. Piste P jakaa kolmion ABC yhden keskijanan suhteessa $1:2$ siten, että sivunpuoleinen osa on lyhyempi. Määritä vektori $\overrightarrow{OP}$ vektorien $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ja $\overrightarrow{OC}$ lausekkeena. Mikä johtopäätös voidaan tuloksen perusteella tehdä?

8. Käyrän $y = \sin x$ piste (x,y), $0 < x < \pi$, yhdistetään x-akseliin suoran $y = -\frac{1}{2}x$ suuntaisella janalla J. Määritä käyrän välillä $[0,x]$ olevan osan, janan J ja x-akselin rajoittaman tasoalueen pinta-ala A x:n funktiona. Millä x:n arvolla A saavuttaa suurimman arvonsa?

9. **a)** On annettu ympyrät K_1: $x^2+y^2+4y=0$ ja K_2: $x^2+y^2-10x-4y+28=0$ sekä piste $P=(4,0)$. Millä todennäköisyydellä pisteen P kautta umpimähkään piirretty suora kohtaa sekä ympyrän K_1 että ympyrän K_2?

b) Bakteeripopulaation määrä $y(t)$ hetkellä $t \geq 0$ noudattaa differentiaaliyhtälöä $y'(t) = ay(t) - by(t)^2$, missä $a > b > 0$. Oletetaan, että $y(t) \in \,]0, \frac{a}{b}[$ jokaisella $t \geq 0$. Osoita yhtälöä ratkaisematta, että y on aidosti kasvava. Jos populaation kasvunopeus $y'(t)$ on suurimmillaan hetkellä $t_0 > 0$, niin mikä on populaation määrä $y(t_0)$ hetkellä t_0?

10. **a)** Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen, jaksona $\omega \neq 0$, jos $f(x+\omega) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Anna esimerkki jatkuvasta jaksollisesta funktiosta ja epäjatkuvasta jaksollisesta funktiosta. Onko derivoituvan jaksollisen funktion derivaatta aina jaksollinen? Osoita, että jatkuva jaksollinen funktio saa suurimman arvonsa.

b) **1°** Osoita, että kymmenjärjestelmän luku

$$a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \cdots + a_1 10 + a_0$$

on jaollinen kolmella, jos ja vain jos $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ on jaollinen kolmella. **2°** Näytä, että luku $7^{2502} + 2^{1573}$ on jaollinen kolmella.