Lyhyt matematiikka 27.9.2000, ratkaisut:

1. Yhtälön $\frac{3}{5}x+2=1$ ratkaisu on $x=-\frac{5}{3}$. Koska $3(-\frac{5}{3})^2-7(-\frac{5}{3})-20=\frac{25}{3}+\frac{35}{3}-20=0$, toteuttaa $-\frac{5}{3}$ myös toisen yhtälön. Näin ollen yhtälöillä on samoja ratkaisuja.

2. Yksi dollari oli 11.1. euroissa $\frac{1}{1{,}1569}\approx 0{,}86438$ EUR ja 12.7. vastaavasti $\frac{1}{1{,}0124}\approx 0{,}98775$ EUR. Koska $\frac{1}{1{,}0124}:\frac{1}{1{,}1569}=\frac{1{,}1569}{1{,}0124}\approx 1{,}1427$, vahvistui dollarin kurssi euroon nähden 14,3 %. Samoin yksi jeni oli 11.1. euroissa $\frac{1}{126{,}33}\approx 0{,}0079158$ EUR ja 12.7. vastaavasti $\frac{1}{123{,}82}\approx 0{,}0080762$ EUR. Koska $\frac{1}{123{,}82}:\frac{1}{126{,}33}=\frac{126{,}33}{123{,}82}\approx 1{,}0203$, vahvistui jenin kurssi euroon nähden 2,0 %.

3. Jos veroton hinta on x mk, on $1{,}22x=136$, joten $x\approx 111{,}475$. Uusi arvonlisävero on 12 % ja uusi maksu on $1{,}12x\approx 124{,}85$ mk. Vastaus: Maksu olisi ollut 124,90 mk.

4. Tynnyrin tilavuus on $V_1=\pi\cdot 0{,}35^2\cdot 1{,}20\approx 0{,}46181\ \mathrm{m}^3=461{,}81\mathrm{dm}^3$. Tyhjän tilan tilavuus on $V_1-120\approx 341{,}81\mathrm{dm}^3$ ja korkeus $\frac{341{,}81}{\pi\cdot 3{,}5^2}\approx 8{,}882$ dm. Vastaus: 89 cm.

5. Tavoitteen mukainen matka-aika on $\frac{25}{23}$ h $=\frac{25\cdot 60}{23}$ min $\approx 65{,}217$ min. Aikaa loppumatkaan on siis $65{,}217-38=27{,}217$ min. Vastaus: 27 minuutissa.

6. Funktion f derivaatta $f'(a)$ on funktion kuvaajan pisteeseen $(a,f(a))$ piirretyn tangentin kulmakerroin. **a)** Suoran $4y+5x=2$ eli $y=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$ kulmakerroin on $-\frac{5}{4}$, joten $f'(1)=-\frac{5}{4}$. **b)** Funktion $f(x)=x^2$ kuvaajan ja suoran $y=x-2$ yhteisten pisteiden x-koordinaatit toteuttavat yhtälön $x^2-x+2=0$. Koska ratkaisukaavan juurrettava on $1-8<0$, ei yhtälöllä ole reaalisia ratkaisuja. Suora ei siis kosketa funktion kuvaajaa missään pisteessä, eikä näin ollen voi olla kuvaajan tangentti.

7. Jos elävän hain hampaan C-14 isotoopin määrä on m ja määrä pienenee $0{,}09m$:ksi $5730x$ vuodessa, on $0{,}5^x m=0{,}09m$. Tällöin $x=\frac{\log 0{,}09}{\log 0{,}5}\approx 3{,}4739$, josta tulee ajaksi $5730\cdot 3{,}4739=19\,905{,}6$. Vastaus: Noin 20 000 vuotta vanha.

8. **a)** Jos viidessä tehtävässä on kaksi vaihtoehtoa, on erilaisia kokoonpanoja $2^5=32$. **b)** Jos 15 tehtävästä on valittava 10, on erilaisia kokoonpanoja $\binom{15}{10}=3003$.

9. Jos sivulle AB asetetaan piste $D=(-2,\sqrt{2})$, saadaan suorakulmaiset kolmiot ADC ja BDC. Jos $\angle CAD=\alpha$, on $\tan\alpha=\frac{DC}{AD}=\frac{5}{\sqrt{2}}$ ja $\alpha\approx 74{,}207^\circ$. Jos $\angle CBD=\beta$, on $\tan\beta=\frac{DC}{BD}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$ ja $\beta\approx 60{,}504^\circ$. Lopuksi kolmion ABC C:ssä oleva kulma on $180^\circ-\alpha-\beta\approx 45{,}289^\circ$. Vastaus: Kolmion kulmat ovat 74,2°; 60,5°; 45,3°.

10. Olkoon poisleikatun neliön sivu x dm, $0 \leq x \leq 2{,}5$. Tällöin marjalaatikon tilavuus litroina on $V(x) = x(8-2x)(5-2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$. Tilavuuden derivaatta on $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$. $V'(x) = 0$, kun $x = 10/3$ tai $x = 1$. Näistä arvoista vain $x = 1$ kuuluu tarkasteltavalle välille $[0;\ 2{,}5]$. Tilavuuden suurin arvo saavutetaan joko välin $[0;\ 2{,}5]$ päätepisteissä tai derivaatan nollakohdassa $x = 1$. Koska $V(0) = V(2{,}5) = 0$ ja $V(1) = 18$, on suurimman mahdollisen laatikon korkeus 1 dm eli 10 cm. Tällaiseen laatikkoon mahtuu 18 litraa marjoja.

11. **a)** Toipilaan voimisteluajat minuutteina muodostavat geometrisen jonon. Jonon ensimmäinen termi on 15, toinen $1{,}05 \cdot 15$, kolmas $1{,}05^2 \cdot 15$,...,n:s $1{,}05^{n-1} \cdot 15$ ja 30. termi $1{,}05^{29} \cdot 15 \approx 61{,}74$ min. Vastaus: 62 min. **b)** Kokonaisaika on geometrinen summa $\sum_{n=1}^{30} 1{,}05^{n-1} \cdot 15 = 15\dfrac{1-1{,}05^{30}}{1-1{,}05} \approx 996{,}58$ min. Vastaus: 16 h 37 min.

12. Olkoon ympyrän säde r, keskipiste O sekä A ja B peräkkäiset monikulmion kärjet. Kolmiossa OAB kulma O on $360^\circ/12 = 30^\circ$ ja sivu AB 12-kulmion sivu a. Jos C on AB:n keskipiste, saadaan suorakulmaisesta kolmiosta OCA, että $\frac{1}{2}a = r\sin 15^\circ$. Näin ollen 12-kulmion piirin pituus on $12a = 24r\sin 15^\circ$. Luku π ($\approx 3{,}14159$) on ympyrän kehän suhde halkaisijaan. Jos ympyrän kehä korvataan 12-kulmion piirillä, saadaan π:lle likiarvo $12a/2r = 12\sin 15^\circ \approx 3{,}106$. Vastaus: 12-kulmion piirin pituus on $24r\sin 15^\circ$. Sillä saadaan π:lle likiarvo kahden numeron tarkkuudella.

13. Funktion suurin arvo on funtion saamista arvoista suurin, ts. välillä $[a,b]$ määritellyn funktion f suurin arvo on $f(x_o)$, jos jokaisella arvolla $x, a \leq x \leq b$, on $f(x) \leq f(x_o)$. Esimerkiksi välillä $[-1,1]$ määritellyn funktion $f(x) = x^2$ suurin arvo on 1, koska jokaisessa pisteessä $x, -1 \leq x \leq 1$, on $f(x) = x^2 \leq 1$ ja $f(1) = 1 = f(-1)$. Samalla on osoitettu, että funktio voi saada suurimman arvonsa kahdessa pisteessä. Mm. kaikilla reaaliarvoilla x määritellyllä funktiolla $f(x) = x$ ei ole suurinta arvoa. Jos nimittäin a olisi suurin arvo, olisi $f(a+1) = a+1 > a$, mikä on ristiriidassa määritelmän kanssa.

14. **a)** Jos korkokanta on p ja $q = 1 + \dfrac{p}{100}$, on $q^6 \cdot 65\,000 = 95\,600$, josta $q = \sqrt[6]{\dfrac{956}{650}} \approx 1{,}066410$. Siis korkokanta $p = 100(q-1) \approx 6{,}64$. **b)** Jos vuotuinen inflaatio on 2 %, on sijoituksen reaaliarvo kuuden vuoden kuluttua $1{,}02^{-6} \cdot 95\,600$. Tällöin $q^6 \cdot 65\,000 = 1,02^{-6} \cdot 95\,600$ eli $q = \dfrac{1}{1{,}02}\sqrt[6]{\dfrac{956}{650}} \approx 1{,}045500$, josta korkokannaksi tulee $p \approx 4{,}55$. Vastaus: **a)** 6,64, **b)** 4,55.

15. Tammikuun 1998 kyselyssä oli SDP:n suhteellinen osuus 0,236. Suhteellisen osuuden otosjakauman keskihajonta $s = \sqrt{\dfrac{0{,}236(1-0{,}236)}{1900}} \approx 0{,}0097415$. SDP:n kannatuksen 95 % luottamusväli tammikuussa on $[0{,}236 - 1{,}96s;\ 0{,}236 + 1{,}96s] = [0{,}2169;\ 0{,}2551]$. SDP:n syyskuun kannatusosuus 0,249 kuuluu em. luottamusväliin, joten ei voida sanoa, että SDP:n kannatus olisi tosiasiallisesti kasvanut 95 % luottamustasolla. Keskustan tammikuun kannatusosuus 0,232 kuuluu myös SDP:n kannatuksen 95 % luottamusväliin. Näin ollen ei voida myöskään sanoa, että SDP:n kannatus tammikuussa todella oli 95 % varmuudella suurempi kuin Keskustan.