Pitkä matematiikka 27.9.2000, ratkaisut:

1. **a)** $(x^{n-1})^{n-1} \cdot (x^n)^{2-n} = x^{(n-1)(n-1)+n(2-n)} = x^1 = x$. **b)** $\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^5}) = \sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a^6} = a - a^2$.

2. $\sqrt{x-2} = 1 + 2/\sqrt{x-2}$ (kun $x > 2$) $\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{x-2} + 2 \Leftrightarrow x - 4 = \sqrt{x-2}$ (kun $x > 4$) $\Leftrightarrow (x-4)^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$. Tämän ratkaisuista $x = 6$ ja $x = 3$ vain edellinen toteuttaa alkuperäisen yhtälön. Vastaus: $x = 6$.

3. Matka s kuljetaan nopeudella v ajassa $t_1 = s/v$. Jos matkan alkuosa $0{,}6s$ kuljetaan nopeudella v ja loppuosa $0{,}4s$ nopeudella $1{,}2v$, kuluu matkaan aika $t_2 = 0{,}6s/v + 0{,}4s/(1{,}2v) = 1{,}12s/(1{,}2v)$. Aikojen suhde on $t_2/t_1 = 1{,}12/1{,}2 \approx 0{,}9333 = 1 - 0{,}0667$. Vastaus: Aika lyhenee 6,7 %.

4. Jos tornin korkeus on h m ja katseluetäisyydet x m ja $x + 500$ m, saadaan suorakulmaisista kolmioista sekä $h = x \tan 3{,}5^{\circ}$ että $h = (x + 500)\tan 2{,}5^{\circ}$. Siis $x \tan 3{,}5^{\circ} = (x + 500)\tan 2{,}5^{\circ}$, josta $x = \dfrac{500 \tan 2{,}5^{\circ}}{\tan 3{,}5^{\circ} - \tan 2{,}5^{\circ}} \approx 1247{,}3$ ja $h = x \tan 3{,}5^{\circ} \approx 76{,}29$. Vastaus: Tornin korkeus on 76,3 m ja katseluetäisyydet 1250 m ja 1750 m.

5. Jos $x+y+z = 0$ ja $x^2+y^2+z^2 = 1$, on $0 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = 1 + 2(xy + yz + zx)$. Tästä saadaan, että $xy + yz + zx = -1/2$.

6. Jos $x = 2$ on kolmannen asteen polynomin kaksinkertainen nollakohta, on polynomi muotoa $p(x) = (x-2)^2(ax+b)$. Sen derivaatta on $p'(x) = 2(x-2)(ax+b) + a(x-2)^2$. Koska $p(3) = 3a + b$ ja $p'(1) = -2(a + b) + a = -a - 2b$, saadaan kertoimille a ja b yhtälöpari $3a + b = 15,\ a + 2b = 0$. Tämän ratkaisu on $a = 6,\ b = -3$, joten kysytty polynomi on $p(x) = (x-2)^2(6x-3) = 6x^3 - 27x^2 + 36x - 12$.

7. Sipuli itää todennäköisyydellä 0,7 ja on itämättä todennäköisyydellä 0,3. Istutetaan n sipulia. Vähintään kaksi itää todennäköisyydellä $p = 1 - (P(0 \text{ itää}) + P(1 \text{ itää}))= 1 - (0{,}3^n + n \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^{n-1})$. Jos määritellään funktio $f(x) = 0{,}3^x + n \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^{x-1}$, tulee ehdoksi $0{,}01 > f(n)$. Funktion $f(x)$ derivaatta $f'(x) = 0{,}3^x(7/3 + (1 + 7x/3)\ln 0{,}3) < 0$ ainakin kun $x \geq 1$. Näin ollen $f(x)$ on monotonisesti pienenevä, kun $x \geq 1$. Tarvittava sipulimäärä selviää nyt siitä, että $f(6) \geq 0{,}0109 > 0{,}01$ ja $f(7) \leq 0{,}004 < 0{,}01$. Vastaus: On istutettava vähintään 7 sipulia.

8. Olkoot $\overline{a}, \overline{b}$ ja $\overline{c}$ kolmion kärkipisteiden A, B ja C paikkavektorit. Ensimmäinen ehto $(1) : (\overline{p} - \overline{a}) \cdot (\overline{b} - \overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \overline{AP} \perp \overline{CB}$ eli piste P on A:sta lähtevällä kolmion korkeusjanalla. Vastaavasti yhtälöstä $(2) : (\overline{p} - \overline{b}) \cdot (\overline{c} - \overline{a}) = 0$ nähdään, että piste P on B:sta lähtevällä korkeusjanalla. Piste P on siten kärjistä A ja B lähtevien korkeusjanojen leikkauspiste. Yhtälöstä (1) saadaan, että $\overline{p} \cdot (\overline{b} - \overline{c}) = \overline{a} \cdot (\overline{b} - \overline{c})$. Vastaavasti yhtälöstä (2) saadaan $\overline{p} \cdot (\overline{c} - \overline{a}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} - \overline{a})$. Laskemalla yhtälöt puolittain yhteen saadaan $\overline{p} \cdot (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{c} \cdot (\overline{b} - \overline{a})$ eli $(\overline{p} - \overline{c}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 0$, mikä piti todistaa. Tästä seuraa analogisesti alun kanssa, että piste P on myös kärjestä C lähtevällä korkeusjanalla. Vektorialgebrallisesti on osoitettu, että kolmion korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä.

9. Suunnistaja kiertäköön A:sta lähtien suon reunaa matkan s_1 km ja oikaiskoon sitten suoraan suon poikki pisteeseen B matkan s_2 km. Valitaan muuttujaksi matkaa s_1 vastaava keskuskulma $\alpha \in [0, \pi]$. Tällöin matka $s_1 = \frac{1}{2}\alpha$. Piirtämällä keskipisteestä kohtisuora suon kulkumatkalle saadaan, että $s_2 = \sin\frac{1}{2}(\pi - \alpha) = \cos\frac{1}{2}\alpha$. Matkaan käytetty aika on tällöin $f(\alpha) = s_1/10 + s_2/5 = \frac{1}{10}(\frac{1}{2}\alpha + 2\cos\frac{1}{2}\alpha)$. Se ei riipu matkojen s_1 ja s_2 kulkujärjestyksestä. Kun $0 \leq \alpha \leq \pi$, on derivaatta $f'(\alpha) = \frac{1}{10}(\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{2}\alpha) = 0$, kun $\alpha = \frac{1}{3}\pi$. Koska $f(0) = 0{,}2$, $f(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{10}(\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}) \approx 0{,}2256$ ja $f(\pi) = \frac{1}{20}\pi \approx 0{,}1571$, saa f pienimmän arvonsa, kun $\alpha = \pi$. Vastaus: Suunnistajan on syytä kiertää suo sen reunaa pitkin.

10. Lauseke $f(n) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n)$ on arvolla $n = 1$ kokonaisluku, sillä $f(1) = \frac{1}{6}(1+5) = 1$. Oletetaan sitten, että $f(n)$ on kokonaisluku ja tarkastellaan lauseketta $f(n+1)$. $f(n+1) = \frac{1}{6}((n+1)^3 + 5(n+1)) = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6) = f(n) + \frac{1}{2}n(n+1) + 1$. Koska $f(n)$ on induktio-oletuksen mukaan kokonaisluku ja $n(n+1)$ on parillinen, on myös $f(n+1)$ kokonaisluku. Koska n on mielivaltainen, on osoitettu, että $f(n)$ on kokonaisluku kaikilla kokonaislukuarvoilla $n \geq 1$.

11. Kohdatkoon pisteestä P_i lähtevä askel suoran s_2 pisteessä Q_i, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Askelista syntyy suorien s_1 ja s_2 väliin yhdenmuotoiset kolmiot $P_0Q_0P_1$, $P_1Q_1P_2, ...,$ $P_{n-1}Q_{n-1}P_n$, joiden kateeteista muodostuu tarkasteltava porrasviiva. Koska $P_0 = (0, -1)$, on $Q_0 = (0, 1)$. Jos $P_1 = (x_1, y_1)$, on $y_1 = 1$ ja $x_1 = \frac{4}{3}(y_1 + 1) = \frac{8}{3}$ eli $P_1 = (\frac{8}{3}, 1)$. Jos $Q_1 = (x_2, y_2)$, on $x_2 = x_1 = \frac{8}{3}$ ja $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + 1 = \frac{7}{3}$ eli $Q_1 = (\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$. Näin ensimäisten askelosien pituudet ovat $P_0Q_0 = 2$, $Q_0P_1 = \frac{8}{3}$ ja $P_1Q_1 = \frac{4}{3}$. Koska $P_1Q_1/P_0Q_0 = 2/3$, on kahden peräkkäisen kolmion $P_{i-1}Q_{i-1}P_i$ ja $P_iQ_iP_{i+1}$ vastinosien suhde $2/3$. Ensimmäisen askelen $P_0 \to P_1$ pituus on $2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$. Toisen askelen $P_1 \to P_2$ pituus on tällöin $\frac{2}{3} \cdot \frac{14}{3}$, kolmannen askelen $P_2 \to P_3$ pituus $(\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{14}{3}$ ja yleisen askelen $P_i \to P_{i+1}$ pituus $(\frac{2}{3})^i \cdot \frac{14}{3}$. Porrasviivan $P_0 \to P_n$ pituus on siten geometrinen summa $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{2}{3})^i \cdot \frac{14}{3} = 14(1 - (\frac{2}{3})^n)$. Koska $0 < \frac{2}{3} < 1$, on $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 14(1 - \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n) = 14$.

12. Jotta yhtälö olisi määritelty, on oltava $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$. Edelleen, $\log_y x = \log_x x / \log_x y = 1/\log_x y$. Näin ollen haetuille pisteille (x, y) pätee $1 = \log_y x \cdot \log_x y = (\log_y x)^2$, joten $\log_y x = \pm 1$ eli $y = x$ tai $y = 1/x$. Yhtälön toteuttavien tason pisteiden joukko on $\{(x, y) |\ x > 0,\ x \neq 1,\ y = x \text{ tai } y = 1/x\}$.

13. Jos $G(t)$ on funktion $\sqrt{t^2 + 1}$ integraalifunktio, on $f(x) = G(3x) - G(x)$. Koska $G'(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, on $f'(x) = 3G'(3x) - G'(x) = 3\sqrt{(3x)^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}$. Selvästi jokaisella arvolla $x \in \mathbb{R}$ on $f'(x) \geq 2\sqrt{x^2 + 1} > 0$, joten f on aidosti kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä, eikä sillä voi olla ääriarvoja.

14. Jos käyrä on $y = y(x)$, on pisteessä (x, y) tangentin kulmakerroin $y'(x)$. Pisteen $(x, y) \neq (0, 0)$ ja origon kautta kulkevan suoran kulmakerroin on y/x. Tehtävän mukaan on $y'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{y(x)}{x}$. Muodosta $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dx}{x}$ saadaan differentiaaliyhtälön ratkaisuksi $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + C$ eli $y = c\sqrt{|x|}$. Ehdosta $y(4) = 1$ saadaan $1 = 2c$ eli $c = \frac{1}{2}$. Koska käyrän on kuljettava pisteen (4,1) kautta, voidaan olettaa, että $x > 0$. Käyrän yhtälö on siten $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

15. Diofantoksen yhtälön $10x + 4y = 36$ eli $5x + 2y = 18$ kaikki ratkaisut ovat muotoa $x = x_0 + n\dfrac{2}{\mathrm{syt}(5,2)}$, $y = y_0 - n\dfrac{5}{\mathrm{syt}(5,2)}$, missä n on kokonaisluku ja (x_0, y_0) on jokin yhtälön yksittäisratkaisu. Selvästi syt(5,2)=1. Koska $18 = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4$, voidaan valita $x_0 = 2,\ y_0 = 4$. Vastaus: $x = 2 + 2n,\ y = 4 - 5n,\ n \in \mathbf{Z}$.