Lyhyt matematiikka 24.9.2003, ratkaisut:

1. Seuran A kurssi kestää 15 tuntia, joten tunnin hinta on $95{,}50/15 \approx 6{,}367$ euroa. Kuntokeskuksessa B tunnin hinta on $84{,}60/12 = 7{,}05$ euroa. Tuntia kohden on A:n kurssi $100(1-6{,}367/7{,}05) \approx 9{,}69\,\%$ halvempi. Vastaus: A:n kurssi on 9,7 % halvempi.

2. Yhtälö sievenee muotoon $21x = 7$. Sen ratkaisu on $x = \frac{1}{3}$. Koska ratkaisulle pätee $27 \cdot (\frac{1}{3})^3 - 54 \cdot \frac{1}{3} + 17 = 1 - 18 + 17 = 0$, toteuttaa se yhtälön $27x^3 - 54x + 17 = 0$.

3. Jakauman keskiarvo on $\overline{x} = \frac{1188}{12} = 99$ ja keskihajonta $\sigma = \sqrt{\frac{5590}{12}} \approx 21{,}58$. Siis $\overline{x} - 2\sigma \approx 55{,}84$ ja $\overline{x} + 2\sigma \approx 142{,}16$. Vuoden 1991 poikasmäärä $53 < \overline{x} - 2\sigma$, joten se poikkeaa merkitsevästi keskimääräisestä. Vuoden 2001 poikasmäärä 127 ei poikkea merkitsevästi keskimääräisestä, koska $\overline{x} - 2\sigma < 127 < \overline{x} + 2\sigma$.

4. Väestön tiheys tasaisesti jaettuna koko maapallolle on $6{,}3 \cdot 10^9/(4\pi 6370^2) \approx 12{,}36$ henkeä/km^2 ja jaettuna maapinta-alalle $6{,}3 \cdot 10^9/(0{,}29 \cdot 4\pi 6370^2) \approx 42{,}60$ henkeä/km^2. Vastaus: Koko maapallolla 12 henkeä/km^2 ja maa-alueilla 43 henkeä/km^2.

5. Babylonialaisten likiarvo π:lle oli $\pi_B = 3\frac{1}{8} = 3{,}125 < \pi = 3{,}1415926....$ Egyptiläisten likiarvo π_E saadaan yhtälöstä $\pi_E(\frac{9}{2})^2 = 8^2$, jonka ratkaisu on $\pi_E = \frac{256}{81} = 3\frac{13}{81} \approx 3{,}160494 > \pi$. Likiarvojen keskiarvo on $\pi_K = \frac{1}{2}(\pi_B + \pi_E) \approx 3{,}142747$. Tämä poikkeaa π:n arvosta $100(\pi_K/\pi - 1) \approx 0{,}037$ %.

6. Kolmiossa ABC on $AC = 70{,}0$ m ja $BC = 86{,}5$ m sekä A:ssa oleva kulma $\alpha = 35{,}0^\circ$. Korkeusjana kärjestä C leikatkoon AB:n pisteessä D. Tällöin kolmion korkeus $h = CD = 70 \sin 35^\circ \approx 40{,}15035$. B:ssä olevalle kulmalle β saadaan yhtälöstä $\sin\beta = h/86{,}5$ likiarvo $\beta \approx 27{,}65625^\circ$. Kolmion kolmas kulma $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \approx 117{,}34375$. Kolmion ala on $\frac{1}{2}h(AD + BD) = \frac{1}{2}h(70\cos\alpha + 86{,}5\cos\beta) \approx 2689{,}23$ m^2. Vastaus: Kulmat ovat $27{,}7^\circ$ ja $117{,}3^\circ$ sekä ala 2689 m^2.

7. Jos jonon ensimmäinen termi on a ja suhdeluku q, niin kymmenen ensimmäisen termin summa $S_{10} = a\dfrac{1-q^{10}}{1-q}$. Koska $q = 4$, on $a = S_{10} \cdot \dfrac{1-q}{1-q^{10}} = 3\,844\,775 \cdot \dfrac{3}{1\,048\,575} = 11$. Kymmenes termi $a_{10} = aq^9 = 11 \cdot 4^9 = 2\,883\,584$.

8. Olkoon korkokanta p ja lähdeverotettu korkotekijä $q = 1 + 0{,}71p/100$. Tilin saldo on toisen vuoden alussa $5000q + 4500$ ja kolmannen vuoden alussa $q(5000q + 4500)$. Tästä saadaan yhtälö $5000q^2 + 4500q = 9894{,}85$ eli $50q^2 + 45q - 98{,}9485 = 0$. Tämän positiivinen ratkaisu on $q_+ = 0{,}01(-45 + \sqrt{21814{,}7}) \approx 1{,}0269800$. Näin ollen $p = 100(q_+ - 1)/0{,}71 \approx 3{,}800$. Vastaus: Korkokanta oli 3,80.

9. Seitsemän rastin lottoruudukoita on $\binom{39}{7} = 15\,380\,937$ erilaista. Neljän oikean numeron ruudukoita on $\binom{7}{4}\binom{32}{3} = 173\,600$ erilaista. Tämä on juuri annettu luku. Erilaisia viisi oikein ruudukoita on $\binom{7}{5}\binom{32}{2} = 10\,416$ ja kuusi oikein ruudukoita $\binom{7}{6}\binom{32}{1} = 224$.

10. Sademittari kerää a mm sateesta määrän $V = \pi 66^2 a$ mm^3. Jos tämän erän korkeus mitta-asteikko-osassa on h mm, saadaan yhtälö $\pi 22^2 h = V$, josta ratkeaa $h = (66/22)^2 a$ mm $= 9a$ mm. Viivojen välin on oltava siten 9 mm.

11. Jos ohittaja etenee ohituksessa x km, niin ohitettava etenee $x-0{,}1$ km. Tästä saadaan yhtälö $x/100 = (x-0{,}1)/80$, jonka ratkaisu on $x = 0{,}5$ km. Ohituksen kesto on $3600 \cdot 0{,}5/100 = 18$ s. Vastaus: Vasemmalla kaistalla 500 m. Ohitus kesti 18 s.

12. Leivottakoon terveyspullia x taikinallista ja terveyssämpylöitä y taikinallista. Jauhovarastoehtojen $0{,}3x+0{,}1y \leq 30$, $0{,}15x+0{,}4y \leq 36$ sekä ehtojen $x \geq 0$, $y \geq 0$ määräämä alue G on nelikulmio, jonka kärjet ovat $O = (0,0)$, $A = (100,0)$, $B = (80,60)$ ja $C = (0,90)$. On löydettävä G:n piste, jossa tuottofunktiolla $t = 4{,}5x + 2{,}5y$ on suurin arvo, ts. suurin arvo t, jolla suoralla $s : 4{,}5x + 2{,}5y = t$ ja G:llä on yhteisiä pisteitä. Mahdollisia pisteitä ovat nyt G:n kärkipisteet ja niistä B:ssä saadaan suurin t:n arvo. Koska taikinassa on kymmenen tuotetta, saadaan suurin tuotto valmistamalla 800 terveyspullaa ja 600 terveyssämpylää. Vehnäjauhot riittävät 300 sämpylätaikinaan ja ohrajauhot 90 sämpylätaikinaan. Jos siis valmistetaan pelkkiä sämpylöitä, loppuvat ohrajauhot kun vehnäjauhoja on vielä 21 kg jäljellä.

13. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin $k = \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{21a+3b}{3} = 7a+b$. Funktion derivaatta on $f'(x) = 2ax + b$. Sen A:ssa ja B:ssä otettujen arvojen keskiarvo on $\frac{1}{2}(4a + b + 10a + b) = 7a + b = k$, mikä piti osoittaa.

14. Säästäjällä on periodin lopussa osakkeita $100(2/20 + 2/18 + 2/16 + 2/14 + 2/12 + 2/10 + 1/8) \approx 97{,}06349$ kpl, joiden arvo on 20 euroa kappaleelta eli yhteensä 1941,27 euroa. Kertasijoitus olisi 1300 euroa. Osakkeiden arvo on sitä $100(1941{,}27/1300-1) \approx 49{,}33$ % suurempi.

15. Kyseessä on toistokoe, missä palautuksen todennäköisyys $p = 0{,}11$ ja toistokertojen määrä $n = 2500$. Jos x ilmaisee palautusten lukumäärän, on määrättävä $P(x \geq x_0) = 1 - P(x < x_0)$, missä $x_0 = 300$. Opastuksen mukaan x noudattaa normaalijakaumaa $N(np, \sqrt{np(1-p)}) = N(275; 15{,}644488)$. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan $N(0,1)$ muunnoksella $z = (x - 275)/15{,}644488$, $z_0 = (x_0 - 275)/15{,}644488 \approx 1{,}5980$. Nyt $P(x < x_0) = P(z < z_0) = \Phi(z_0) = 0{,}9450$, joten kysytty $P(x \geq 300) = 0{,}0550$. Vastaus: Todennäköisyys on 5,5 %.