YLIOPPILASTUTKINTO-LAUTAKUNTA 29.09.2006 MATEMATIIKAN KOE PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. **a)** Sievennä lauseke $(1+x)^3-(1-x)^3$. **b)** Ratkaise yhtälö $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{x+1}$.

2. **a)** Derivoi lauseke $(x^2+1)e^{2x}$. **b)** Laske integraali $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$.

3. Annetun ympyrän pinta-ala on A. Mikä on ympyrän ympäri piirretyn neliön ala? Entä ympyrän sisään piirretyn neliön ala?

4. Jaa vektori $\bar{i}+7\bar{j}$ vektoreiden $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j}$ ja $\bar{b}=-7\bar{i}+6\bar{j}$ suuntaisiin komponentteihin.

5. Hopean ja kuparin seoksesta tehty esine painaa 150 g, ja sen tiheys on 10,1 kg/dm^3. Kuinka monta painoprosenttia esineessä on hopeaa ja kuinka monta kuparia, kun hopean tiheys on 10,5 kg/dm^3 ja kuparin 9,0 kg/dm^3?

6. Määritä funktion $f(x)=\cos^2 x+\sin x$ suurin ja pienin arvo.

7. Nelikulmion muotoisen tontin kolme peräkkäistä kulmaa ovat mittausten mukaan 70°, 125° ja 110°; näiden välisten rajalinjojen pituudet ovat (samassa järjestyksessä) 88 metriä ja 120 metriä. Kuinka suuri on tontin neljäs kulma? Mitkä ovat tontin kahden muun sivun pituudet? Ilmoita pituudet metrin tarkkuudella.

8. Määritä muodossa $ax+by+cz=1$ sen tason yhtälö, joka kulkee pisteen $(1,1,1)$ kautta ja leikkaa xy-tason pitkin suoraa $x-y=2$.

9. Suoran ympyräkartion korkeus on h ja pohjan säde r. Kartion sisään asetetaan pallo, joka sivuaa vaippaa ja pohjaa. Määritä pallon säde R. Määritä $\lim_{h\to\infty} R$, kun r on vakio, ja $\lim_{r\to\infty} R$, kun h on vakio.

10. Tiedetään, että eräässä nelilapsisessa perheessä ainakin yksi lapsista on tyttö. Mikä on tällöin todennäköisyys, että kaikki lapset ovat tyttöjä? Jos tiedetään, että ainakin kaksi lapsista on tyttöjä, mikä on todennäköisyys, että perheessä on kaksi poikaa? Oletetaan, että poikia ja tyttöjä syntyy yhtä suurella todennäköisyydellä. Millaiset tulokset saadaan, jos käytetäänkin tilastojen antamia todennäköisyyksiä: poikien syntymistodennäköisyys on $p=0{,}51$ ja tyttöjen $t=0{,}49$? Sukupuolen määräytymiset oletetaan riippumattomiksi tapahtumiksi.

11. Yhtälö $2x^2+y^2=6$ määrittää pisteen $x=1$ ympäristössä derivoituvan funktion $y=y(x)$, jolle pätee $y(1)=-2$. Määritä funktion kuvaajalle pisteeseen $(1,-2)$ asetetun tangentin yhtälö ja laske, missä pisteessä tangentti leikkaa x-akselin.

12. Jonot (x_n) ja (y_n) olkoot geometrisia lukujonoja. Näytä, että myös tulojono $(z_n)=(x_ny_n)$ on geometrinen jono. Jos geometrinen jono (x_n) suppenee ja geometrinen jono (y_n) hajaantuu, niin onko jono (z_n) aina hajaantuva?

KÄÄNNÄ!

13. Ympyränkaaren päätepisteet ovat $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$, ja kaari kulkee pisteen $(0, 1)$ kautta. Kun kaari pyörähtää x-akselin ympäri, syntyy pyörähdyspinta. Muodosta integraali, joka esittää pinnan rajaaman kappaleen tilavuutta. Integraalia ei tarvitse laskea.

14. Osoita, että funktio

$$y(x) = \frac{(x-a)^2 - 1}{x - a}$$

on differentiaaliyhtälön $(y')^2 - (y^2 + 4)(y' - 1) = 0$ ratkaisu vakion a kaikilla reaaliarvoilla. Millä vakion a arvoilla funktio toteuttaa alkuehdon $y(1) = 2$?

15. Laske integraali $\int_0^4 x^2\, dx$ numeerisesti Simpsonin säännöllä jakamalla integroimisväli neljään osaväliin. Totea, että tulos on tarkka. Tutki virhetermin avulla, minkäasteiset polynomit Simpsonin sääntö integroi tarkasti.