YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

19.9.2007

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä ($\star$) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise epäyhtälö $2 - 3x > 4x$.
b) Muodosta sen suoran yhtälö, joka kulkee pisteiden $(4, -3)$ ja $(-2, 6)$ kautta.
c) Ratkaise L yhtälöstä $t = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

2. **a)** Olkoon $f(x) = \sin x \cos x$. Laske derivaatta $f'(0)$.
b) Laske integraali $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx$.
c) Määritä se funktion $e^x + 1$ integraalifunktio, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta.

3. Kolmiossa ABC on $\overrightarrow{AB} = 2{,}2\,\bar{i} + 7{,}3\,\bar{j}$ ja $\overrightarrow{AC} = 5{,}9\,\bar{i} - 2{,}1\,\bar{j}$. **a)** Määritä kolmanteen sivuun liittyvä vektori $\overrightarrow{BC}$. **b)** Osoita, että BC on kolmion pisin sivu. **c)** Määritä kulman BAC suuruus pistetulon (skalaaritulon) avulla 0,1 asteen tarkkuudella.

4. Tuotteen hintaa korotettiin p prosenttia, jolloin menekki väheni. Tämän johdosta hinta päätettiin alentaa takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta prosenttia korotetusta hinnasta alennus oli?

5. Määritä ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ niiden tangenttien yhtälöt, jotka kulkevat pisteen $(1, 3)$ kautta.

6. Viisi kilometriä pitkän rantaa pitkin kulkevan suoran tieosuuden alkupisteessä kulkija näkee majakan etuviistossa 65 asteen kulmassa tiehen nähden. Tieosuuden loppupisteessä hän näkee saman majakan takaviistossa 54 asteen kulmassa tiehen nähden. Kuinka etäällä majakka on tiestä? Mikä tien piste on lähinnä majakkaa?

7. Suoran kolmisivuisen pyramidin pohja on tasasivuinen kolmio. Pyramidin sivusärmän pituus on 60 cm. Miten on pohjasärmän pituus valittava, jotta pyramidin tilavuus olisi mahdollisimman suuri?

8. Henkilön työmatkalla on kolmet liikennevalot, jotka toimivat toisistaan riippumattomasti. Ne näyttävät henkilön kulkusuuntaan vihreätä valoa 30 %, 40 % ja 20 % ajasta. Laske todennäköisyys, että henkilö joutuu pysähtymään valoihin enintään kerran.

9. Olkoon

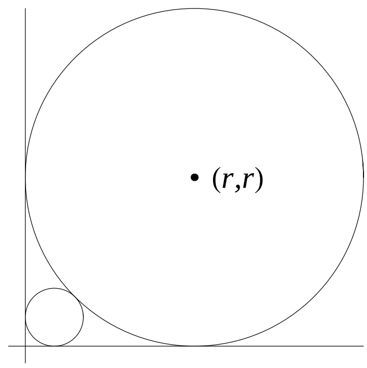
$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Millä muuttujan x arvoilla funktio f on määritelty? Millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä? Mitä arvoja funktio ei saa?

KÄÄNNÄ!

10. Käyrä $y = |\sin 2x|$ ja suora $y = 1$ rajoittavat tasoalueen, kun $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$. Määritä sen pinta-ala.

11. Ympyrän keskipiste on (r, r) ja säde r. Asetetaan uusi ympyrä siten, että se sivuaa koordinaattiakseleita ja alkuperäisen ympyrän origonpuoleista neljänneskaarta (kuva). **a)** Määritä tämän ympyrän säde. **b)** Muodostetaan päättymätön jono ympyröitä siten, että ensimmäinen ympyrä vastaa arvoa $r = 1$ ja jonon seuraava ympyrä saadaan edellisestä aina edellä kuvatulla menettelyllä. Laske ympyröiden yhteenlaskettu pinta-ala. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.



12. Osoita, että funktiolla $f : [2, 5] \to [25, 52]$, $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x$ on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Laske käänteisfunktion arvo $g(45)$ ja sen derivaatan arvo $g'(45)$.

13. Osoita, että luku $n^3 - n$ on jaollinen luvulla 6, kun n on luonnollinen luku.

$\star$**14.** Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \cos x$, on aidosti kasvava ja että se saa kaikki reaalilukuarvot. Päättele, että tällöin yhtälöllä $f(x) = 0$ on vain yksi ratkaisu, ja määritä se kolmen desimaalin tarkkuudella.

$\star$**15.** Origokeskinen r-säteinen ympyrä leikkaa y-akselin pisteessä A ja $(1, 0)$-keskisen yksikkösäteisen ympyrän pisteessä B. Pisteet A ja B sijaitsevat samalla puolella x-akselia. Pisteiden A ja B kautta kulkeva suora leikkaa x-akselin pisteessä P. Määritä sen pisteen koordinaatit, jota P lähestyy, kun $r \to 0$.