Pitkä matematiikka 17.9.2008, ratkaisut:

1. **a)** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x}{3}>\dfrac{3}{4}\iff\dfrac{x}{3}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4}\iff\dfrac{x}{3}<-\dfrac{1}{4}\iff x<-\dfrac{3}{4}$.

b) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1+x}{x^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{x}$.

c) Koska $3x-5y=11\iff y=\frac{3}{5}x-\frac{11}{5}$, on suoran kulmakerroin $\frac{3}{5}$. Pisteen $(6,8)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on $y-8=\frac{3}{5}(x-6)$ eli $3x-5y+22=0$.

2. **a)** $D\dfrac{1-2x^2}{1+x^2}=\dfrac{-4x(1+x^2)-2x(1-2x^2)}{(1+x^2)^2}=-\dfrac{6x}{(1+x^2)^2}$.

b) Funktiot ovat muotoa $\int(e^{3x}-x)dx=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}x^2+C$.

c) Koska $5^n+5^n+5^n+5^n+5^n=5\cdot 5^n=5^{n+1}$, saadaan yhtälö muotoon $5^{n+1}=5^{25}$. Se toteutuu, kun $n+1=25$. Yhtälö pätee siis arvolla $n=24$.

3. **a)** $\int_0^\pi(1+\sin x)dx=\Big/_0^\pi x-\cos x=\pi-\cos\pi-0+\cos 0=\pi+2$.

b) $4x^3-5x^2=2x-3x^3\iff x(7x^2-5x-2)=0\iff x=0$ tai $7x^2-5x-2=0$. Jälkimmäinen ehto pätee, kun $x=\dfrac{5\pm\sqrt{25+56}}{14}=\dfrac{5\pm 9}{14}$ eli kun $x=1$ tai $x=-\frac{2}{7}$.

Vastaus: **a)** $\pi+2$, **b)** $x=-\frac{2}{7}$ tai $x=0$ tai $x=1$.

4. Puu ja sen latvaosa ovat yhdenmuotoisia kartioita. Latvaosan korkeudelle h m pätee $\dfrac{h}{14}=\dfrac{0{,}10}{0{,}35}$, josta saadaan $h=4$. Tukin keskipituudeksi tulee 14 m – 4 m = 10 m. Tukin tilavuus on $V=\dfrac{1}{3}\pi\cdot(\dfrac{0{,}35}{2})^2\cdot 14-\dfrac{1}{3}\pi\cdot(\dfrac{0{,}10}{2})^2\cdot 4\approx 0{,}438514$ (m^3). Palstalta kaadettujen tukkipuiden määrä oli $\dfrac{200}{V}\approx 456{,}086$.

Vastaus: Tukin keskimääräinen pituus oli 10 m. Palstalta kaadettiin 456 puuta.

5. Kolmiot ovat tasakylkisiä kyljen pituuden ollessa 5. Pythagoran lauseesta saadaan ensimmäisen kolmion korkeudeksi $h=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$. Kummankin kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{21}=2\sqrt{21}$. Jos toisen kolmion kannan pituus on $2x$ ja korkeus y, on $xy=2\sqrt{21}$ ja $x^2+y^2=5^2$. Kun edellisestä saatu $y=\dfrac{2\sqrt{21}}{x}$ sijoitetaan jälkimmäiseen, saadaan yhtälö $x^4-25x^2+84=0$. Tämän mukaan $x^2=\dfrac{25\pm\sqrt{25^2-4\cdot 84}}{2}=\dfrac{25\pm 17}{2}$ eli $x^2=4$ tai $x^2=21$. Edellisestä saatu $2x=4$ on annetun kannan pituus. Jälkimmäisestä saadaan toisen kolmion kannan pituudeksi $2x=2\sqrt{21}\approx 9{,}165$.

Vastaus: Kolmannen sivun pituus on $2\sqrt{21}$.

6. Olkoon suorakulmion kärkipisteet akseleilla $(x_0,0)$ ja $(0,y_0)$. Koska kärkipiste (x_0,y_0) on paraabelilla $y=x^2$, on $y_0=x_0^2$. Suorakulmion ala $A=x_0y_0=x_0^3$. Paraabelin alapuolisen osan ala $A_1=\int_0^{x_0}x^2dx=\Big/_0^{x_0}\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}x_0^3$. Paraabelin yläpuolisen osan ala on $A_2=A-A_1=\frac{2}{3}x_0^3$. Tämän suhde alapuolella olevan osan alaan on $\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{2}{1}$.

Vastaus: Suhteessa 2:1.

7. Yhtälö on määritelty, kun $2-x \geq 0$ ja $x+2 \geq 0$ eli kun $-2 \leq x \leq 2$. Korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin. Saadaan $2 - x = (x+2)^2$ eli $x^2 + 5x + 2 = 0$. Tämän yhtälön ratkaisu on $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$ eli $x = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2} \approx -0{,}438$ tai $x = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} \approx -4{,}562$. Näistä vain edellinen kuuluu yhtälön määrittelyalueeseen.
Vastaus: $x = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$.

8. Eri vaihtoehtojen todennäköisyydet ovat $P(\text{valkoinen}, \text{valkoinen}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $P(\text{valkoinen}, \text{musta}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10}$, $P(\text{musta}, \text{musta}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$. Näin ollen $P(X = 0) = \frac{1}{10}$, $P(X = 1) = \frac{6}{10}$, $P(X = 2) = \frac{3}{10}$. Odotusarvo $E(X) = \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{6}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{12}{10} = 1{,}2$.

9. Jos α on jäljelle jääneen sektorin asteluku, merkitään $t = \frac{\alpha}{360}$, jolloin $0 \leq t \leq 1$. Jos kartion korkeus on h ja pohjaympyrän säde R, on $2\pi R = 2\pi rt$, joten $R = tr$. Kartion korkeus $h = \sqrt{r^2 - R^2} = r\sqrt{1-t^2}$. Kartion tilavuus $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 t^2 \sqrt{1-t^2} = \frac{1}{3}\pi r^3 \sqrt{t^4 - t^6}$. Etsitty t:n arvo on se, jolla juurrettava $f(t) = t^4 - t^6$ saa suurimman arvonsa. Funktion f derivaatta $f'(t) = 4t^3 - 6t^5 = 2t^3(2-3t^2)$ häviää, kun $t = 0$ tai $2 - 3t^2 = 0$ eli arvoilla 0, $t_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ ja $t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Näistä t_1 ei kuulu tarkasteluvälille. Koska $f(0) = f(1) = 0$ ja $f(t_2) = \frac{4}{27}$, antaa t_2 funktion f ja samalla tilavuuden V suurimman arvon. Poisleikatun sektorin keskuskulma on $360(1 - t_2) \approx 66{,}061231$.
Vastaus: 66°.

10. Olkoon $f(x) = (1-x)^8 + 8x - 1$. On osoitettava, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on $f(x) \geq 0$. Funktion derivaatta on $f'(x) = -8(1-x)^7 + 8 = 8(1-(1-x)^7)$. Nyt $f'(x) = 0 \iff (1-x)^7 = 1 \iff 1 - x = 1 \iff x = 0$. Lisäksi $f'(x) > 0$, kun $x > 0$ ja $f'(x) < 0$, kun $x < 0$. Näin ollen f saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 0$. Koska $f(0) = 1^8 - 1 = 0$, on väite todistettu.

11. Kolmion OAB sivun AB pituuden neliö on $|\overline{a} - \overline{b}|^2 = (\overline{a} - \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = \overline{a} \cdot \overline{a} - 2\overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{b}$. Oletuksen mukaan $\overline{a} \cdot \overline{a} = 2\overline{a} \cdot \overline{b}$. Näin ollen $|\overline{a} - \overline{b}|^2 = \overline{b} \cdot \overline{b} = |\overline{b}|^2$. Tämän mukaan sivut AB ja OB ovat yhtä pitkät, joten kolmio OAB on tasakylkinen.

12. Funktion nimittäjä $x+2 = 0$, kun $x = -2$. Kun $x = -2$, osoittaja $3x^3 - x^2 - 12x + a = -4 + a$. Funktiolla voi olla raja-arvo kohdassa $x = -2$ vain, jos $-4 + a = 0$ eli vain jos $a = 4$. Edelleen $3x^3 - x^2 - 12x + 4 = (x+2)(3x^2 - 7x + 2)$. Näin ollen arvolla $a = 4$ funktion lauseke sievenee muotoon $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$. Tästä nähdään, että on olemassa $\lim_{x \to -2} f(x) = 3 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 2 = 28$.
Vastaus: Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = -2$, kun $a = 4$. Raja-arvo on 28.

13. Kun $f(x) = x^3$, keskeisdifferenssi on $\dfrac{(x+h)^3 - (x-h)^3}{2h} = \dfrac{6x^2h + 2h^3}{2h} = 3x^2 + h^2$.
Tarkastellaan sitten keskeisdifferenssin lauseketta derivoituvalle funktiolle f.

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{2h} =$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right] \longrightarrow_{h \to 0} \frac{1}{2}[f'(x) + f'(x)] = f'(x).$$

***14.** Reaaliluvun x itseisarvo $|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0 \end{cases}.$

a) Jos $x \geq 0$, on $x \leq x = |x|$. Jos $x < 0$, on $-x > 0$ ja $x < -x = |x|$.

b) Kohdan a) perusteella $x \leq |x|$ ja $y \leq |y|$. Näin ollen myös $x + y \leq |x| + |y|$.

c) Määritelmän ja kohdan a) perusteella $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$. Siis $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ Jos $x + y \geq 0$, on $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$. Jos $x + y < 0$, on $|x + y| = -(x + y) \leq |x| + |y|$ edellisen epäyhtälön perusteella. Siis aina $|x + y| \leq |x| + |y|$.

d) Jos $|x| - |y| \geq 0$, niin $||x| - |y|| = |x| - |y| \leq |x| + |y|$. Jos $|x| - |y| < 0$, niin $||x| - |y|| = -|x| + |y| \leq |x| + |y|$. Siis aina $||x| - |y|| \leq |x| + |y|$.

***15.** Olkoon O origo. Konstruktiossa on jono yhdenmuotoisia kolmioita, OA_1A, OA_2A_1, OA_3A_2, ..., $OA_{n+1}A_n$, ... Piste A_1 on suorien $y = 2x$ ja $y = -\frac{1}{2}x + 6$ leikkauspiste. Yhtälöparin ratkaisu on $x = x_1 = \frac{12}{5}$ ja $y = y_1 = \frac{24}{5}$, joten $A_1 = (x_1,\, y_1) = (\frac{12}{5},\, \frac{24}{5})$. Edelleen $AA_1 = \sqrt{(6 - x_1)^2 + (3 - y_1)^2} = \frac{9}{\sqrt{5}}$ ja $OA_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{12}{\sqrt{5}}$ sekä $OA = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$, joten $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{4}{5}$. Yhdenmuotoisuuden nojalla $\dfrac{A_1A_2}{AA_1} = \dfrac{OA_1}{OA}$, joten $A_1A_2 = \dfrac{OA_1}{OA} \cdot AA_1 = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{9}{\sqrt{5}}$. Edelleen, $\dfrac{A_2A_3}{A_1A_2} = \dfrac{OA_2}{OA_1} = \dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{4}{5}$, joten $A_2A_3 = \dfrac{4}{5}A_1A_2 = (\dfrac{4}{5})^2 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{5}}$. Saman yhdenmuotoisuuden nojalla nähdään vastaavasti, että $A_3A_4 = \dfrac{4}{5}A_2A_3 = (\dfrac{4}{5})^3 \cdot \dfrac{9}{\sqrt{5}}$. Näin jatkamalla saadaan yleisesti, että $A_nA_{n+1} = \dfrac{4}{5}A_{n-1}A_n = (\dfrac{4}{5})^n \cdot \dfrac{9}{\sqrt{5}}$. Janojen A_nA_{n+1} pituudet muodostavat geometrisen sarjan, jossa ensimmäinen termi on $\frac{9}{\sqrt{5}}$ ja suhdeluku $\frac{4}{5}$. Sarjan summa on $S = \dfrac{9}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{4}{5}} = 9\sqrt{5} \approx 20{,}1246$.