Matematiikan ylioppilaskoe 29.9.2010

Lyhyt oppimäärä

Vastaukset

1. **a)** $x = -1$; **b)** $x = \pm 2$; **c)** $\frac{5}{11}$.

2. **a)** 8.36 m^2; **b)** $7°$, $83°$; **c)** $\frac{11}{2}$.

3. Suorat $y = 1$, $y = -\frac{3}{2}x + 3$; leikkauspiste $(\frac{4}{3}, 1)$; ala $\frac{4}{3}$.

4. Sivut: 92 mm $\leftrightarrow a = 184$ m, 73 mm $\leftrightarrow b = 146$ m, kolmas sivu Pythagoraan avulla $c = \sqrt{184^2 - 146^2} \approx 112$ m. Ala $\frac{1}{2}bc \approx 8170 \text{ m}^2$.

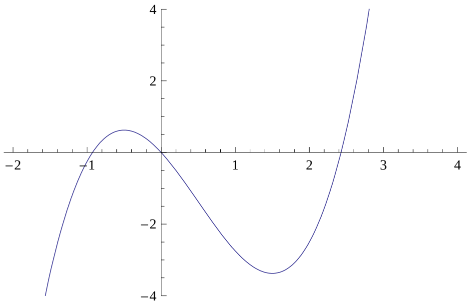
5. Alkuperäinen hinta h, korotettu hinta $1.62 \cdot 1.45 \cdot h = 2.349h$; tekijöiden järjestys ei vaikuta. Korotusprosentti $100(2.349 - 1) = 134.9$.

6. Janojen OA ja OB suuntakulmat: $\tan\alpha = 4 \implies \alpha \approx 76°$, $\tan\beta = \frac{1}{7} \implies \beta \approx 8°$. Näkökulma $\alpha - \beta \approx 68°$.

7. **a)** Nollakohdat $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}(1 + \sqrt{5})$, $x_3 = \frac{3}{4}(1 - \sqrt{5})$.

b) Derivaatta $3x^2 - 3x - \frac{9}{4}$; ääriarvokohdat $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, ääriarvot $-\frac{27}{8}$, $\frac{5}{8}$.

c) Kuvaaja:



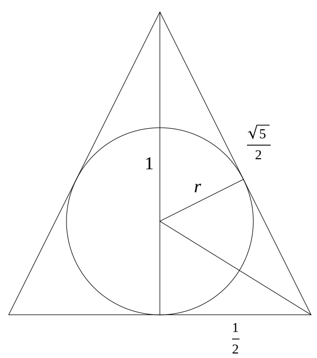
8. **a)** Mahdollisia käyttäjätunnuksia 1 000 000 kpl, todennäköisyys osua olemassaolevaan käyttäjätunnukseen $\frac{600000}{1000000} = 0.6$.

b) Erilaisia salasanoja 10 000 kpl, samoin erilaisia kertakäyttötunnuksia. Todennäköisyys osua oikeaan salasanaan tai kertakäyttötunnukseen $\frac{1}{10000} = 0.0001$, todennäköisyys onnistua kirjautumaan $0.6 \cdot 0.0001 \cdot 0.0001 = 6 \cdot 10^{-9}$.

9. **a)** Lyöntejä vuorokaudessa $2(1+2+3+\cdots+12)+24=180$, viikossa $7\cdot 180=1260$. Laskeuma yhdellä lyönnillä $1120/1260\approx 0.889$ mm.

b) 650 mm $\leftrightarrow$ 731.25 lyöntiä $\leftrightarrow$ 4 vrk+11.25 lyöntiä . Lyöntejä välillä 12.05–15.55: $1+1+1+2+1+3+1=10$. Siis perjantai klo 16.00.

10. Ehto pallon säteelle $\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$, josta $r=\frac{1}{1+\sqrt{5}}$.



Pallon tilavuus $V_p=\dfrac{4\pi}{3(\sqrt{5}+1)^3}$, kartion tilavuus $V_k=\dfrac{\pi}{12}$. Prosenttiosuus $V_p/V_k\approx$ 47 %.

11. Poliisin nopeus v, Arskan nopeus $0.9v$, poliisin juoksema matka x. Kiinniottohetken ajat yhtä suuret: $\dfrac{x}{v}=\dfrac{x-200+0.5}{0.9v}$. Tästä seuraa $x=1995$ m, ja poliisi siis sai Arskan kiinni. (Kyseessä klassinen *Akhilleus ja kilpikonna* -ongelma, joka voidaan ratkaista myös geometrista summaa käyttäen.)

12. Eksponentiaalinen malli $I=I_0\,2^{-kt}$, t vuosina. Havaintojen aikaväli 19 vuotta, jolloin ehdosta $50=78\cdot 2^{-19k}$ saadaan $k=0.0337655\ldots$. Puoliintumisaika tällöin $T=1/k\approx 30$. Siis aktiivisuus vähentynyt puoleen vuonna 2017, neljännekseen vuonna 2047. Vaasassa samoin, sillä puoliintumisaika ei riipu lähtötasosta.

13. Tuntemattoman x eliminointi johtaa yhtälöön $(-a-7)y=2a-15$, joka ratkeaa, jos $a\neq -7$, ja on ristiriitainen, jos $a=-7$.

14. Nykyarvo $7000(1+q^{-1}+q^{-2}+\cdots+q^{-9})\approx 59645.37$ € ($q=1.0375$).

15. Kierretyt pisteet: myötäpäivään $(0.64, -2.14)$, vastapäivään $(-1.33, 1.80)$.