Matematiikan ylioppilaskoe 29.9.2010

Pitkä oppimäärä

Vastaukset

1. **a)** $4ab$; **b)** $x = 60° + n \cdot 180°$, $n \in \mathbb{Z}$; **c)** $\frac{3}{4}$.

2. **a)** $x \geq \frac{3}{\sqrt{7}-4}$; **b)** $\ln(2)$; **c)** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

3. **a)** Suoran piste on $(1+2t, 2+t, 2+ts)$. Tämän tulee toteuttaa tason yhtälö kaikilla parametrin t arvoilla, mistä seuraa $s = -2$.
b) Ehdon $F(0) = 0$ täyttävä integraalifunktio on $F(x) = -\frac{1}{4}(2-x)^4 + 4$, jolloin $F(1) = \frac{15}{4}$.

4. $a = 1$, $b = -6$, $c = 5$; siis $a + b + c = 0$.

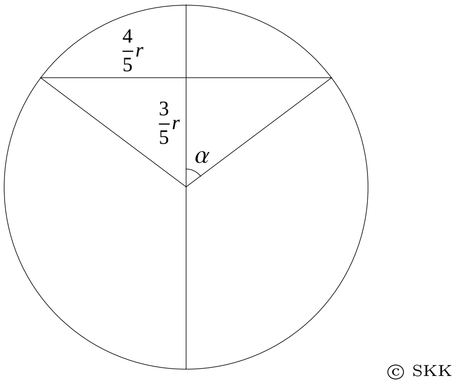
5. Käytetyt ajat: joen leveys kerrottuna luvulla $0.088\ldots$ (A), $0.082\ldots$ (B); B siis pääsee ensin vastarannalle.

6. Todennäköisyys, että 15:sta on n oikein ja $15 - n$ väärin: $p_n = \binom{15}{n}(\frac{1}{2})^n(\frac{1}{2})^{15-n}$.
Todennäköisyys, että läpäisee: $1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \approx 0.94$.

7. Derivaatan nollakohdat: $x = 2n\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + n\frac{2\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$. $\max f = \frac{3}{4}$, $\min f = -\frac{3}{2}$.
Maksimikohdat $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. (Minimikohdat $x = n\pi$, n pariton.)

8. Jos $a_n = a + nd$, niin $b_n = 3^a \cdot (3^d)^n$. Jono (b_n) aidosti vähenevä, jos $3^d < 1$ eli $d < 0$.

9.



Kuvion mukaisessa tukin poikkileikkauksessa on $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, jolloin $\alpha \approx 53.130°$. Poikkileikkauksesta veden alle jäävän segmentin ala on $A = \frac{360-2\alpha}{360} \cdot \pi r^2 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} r^2$. Jos tukin pituus on d, niin tukin massa on Ad kerrottuna veden tiheydellä. Tällöin tukin tiheys on $Ad/(\pi r^2 d) = 1 - \frac{\alpha}{180} + \frac{12}{25\pi} \approx 0.86$ kg/dm^3.

10. Suoran yhtälö on $y - b = k(x - a)$ ja kolmion ala $A(k) = \frac{1}{2}(a - \dfrac{b}{k})(b - ka)$. Tällöin minimiala on $A(-\frac{b}{a}) = 2ab$.

11. **a)** Ei ole tautologia, sillä $A \vee B$ on epätosi, jos A ja B ovat epätosia.

b) On tautologia, sillä $(A \vee \neg B) \vee (C \vee B) \iff (A \vee C) \vee (B \vee \neg B)$ ja $B \vee \neg B$ on tosi.

12. Jakamalla $P(x)$ binomilla $2x - 1$ saadaan jakojäännökseksi $a - 2$, joten tulee olla $a = 2$. Osamäärä on $x^3 - x^2 - 4x - 2$, jolla on nollakohta $x = -1$ ja siis tekijänä $x + 1$. Uusi jakolasku antaa osamääräksi $x^2 - 2x - 2$, jolla on nollakohdat $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Juuret siis $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1 + \sqrt{3}$, $x_4 = 1 - \sqrt{3}$.

13. Ehto $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$ antaa $a = 3$, jolloin f on tiheysfunktio. Kertymäfunktio on $F(x) = 0$, jos $x \leq 0$, ja $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = 1 - e^{-3x}$, jos $x \geq 0$. $P(X \geq t) = e^{-3t}$, jos $t \geq 0$.

14. **a)** Käänteisfunktio on olemassa, sillä $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$.

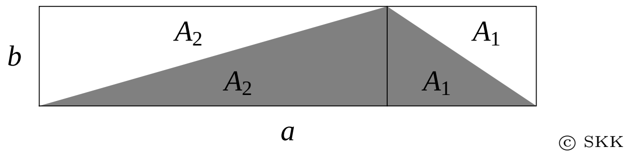
b) $f(1) = 2 \implies g(2) = 1$, joten $g'(2) = 1/f'(g(2)) = 1/f'(1) = \frac{1}{2}$.

c) Funktion ja käänteisfunktion kuvaajat leikkaavat suoralla $y = x$, joten tulee olla $x = \ln x + x + 1$. Tästä seuraa $x = \frac{1}{e}$, ja leikkauspiste on $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

d) Funktion kuvaajan tangentin kulmakerroin leikkauspisteessä on $f'(\frac{1}{e}) = \tan\alpha = e + 1$. Kuvaajien välinen kulma (= kuvaajien tangenttien välinen kulma) on $2(\alpha - \frac{\pi}{4}) \approx 60°$.

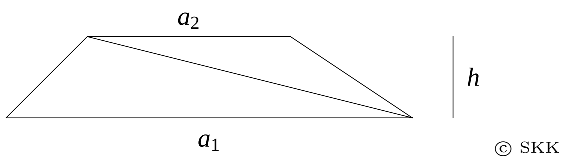
15. **a)** Kolmio on tylppäkulmainen, jos sen jokin kulma on suurempi kuin 90°.

b) Kuvion



mukaisesti on $ab = 2A_1 + 2A_2$, jolloin kolmion ala on $A_1 + A_2 = \frac{1}{2}ab$. Jos kantana on tylpän kulman viereinen sivu, saadaan vastaava tulos erotusten avulla: $ab = 2A_1 - 2A_2$, jolloin $A_1 - A_2 = \frac{1}{2}ab$. (Piirrä kuvio!)

c) Kuvion



mukaisesti puolisuunnikas muodostuu kahdesta kolmiosta. Ala on tällöin kolmioiden alojen summa, joka edellisen kohdan perusteella on $\frac{1}{2}a_1h + \frac{1}{2}a_2h = h \cdot \dfrac{a_1 + a_2}{2}$.