Lyhyt matematiikka 28.9.2011, ratkaisut:

1. **a)** Kun $x = 3$, on $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \dfrac{3^2 - 2 \cdot 3 + 1}{3 - 1} = \dfrac{4}{2} = 2$.

b) $\dfrac{5}{x} = -\dfrac{1}{2} \iff 5 = -\dfrac{1}{2}x \iff x = -10$.

c) $x^2 - 3(x + 3) = 3x - 18 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 = 0 \iff x = 3$.

Vastaus: **a)** 2, **b)** $x = -10$, **c)** $x = 3$.

2. **a)** Kulma $B = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ ja kulma $C = 180^\circ - 70^\circ - 28^\circ = 82^\circ$.

b) $\dfrac{ax}{2} - 1 = \dfrac{b - 2}{2} \iff ax - 2 = b - 2 \iff x = \dfrac{b}{a}$.

c) $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = ab$.

Vastaus: **a)** $B = 70^\circ$ ja $C = 82^\circ$, **b)** $x = \dfrac{b}{a}$, **c)** ab.

3. Koko neliön ala on yksi ja sen yhden apuneliön ala $\frac{1}{16}$. Kuviosta näkee suoraan, että $a(A) = a(B) = \frac{1}{4}$, $a(C) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$, $a(D) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$, $a(E) = a(C) = \frac{1}{16}$, $a(F) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ ja $a(G) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.

4. Beethovenin ikä L, Mozartin ikä W ja Bachin ikä J toteuttavat yhtälöt

$L + W + J = 156$, $J = L + 9$ ja $W = L - 21$.

Sijoittamalla jälkimmäisten yhtälöiden antamat J:n ja W:n lausekkeet ensimmäiseen yhtälöön saadaan $L + L - 21 + L + 9 = 156 \iff L = \dfrac{168}{3} = 56$, joten $J = 56 + 9 = 65$ ja $W = 56 - 21 = 35$.

Vastaus: Beethoven 56-, Mozart 35- ja Bach 65-vuotiaaksi.

5. **a)** Osakkeen arvo a oli laskun jälkeen $(1 - 0{,}46)a = 0{,}54a$, ensimmäisen nousun jälkeen $1{,}15 \cdot 0{,}54a$ ja toisen nousun jälkeen $1{,}34 \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}54a = 0{,}83214a < a$.

b) Nousuprosentille p pätee $(1 + \dfrac{p}{100}) \cdot 1{,}15 \cdot 0{,}54a = a \iff 1 + \dfrac{p}{100} = \dfrac{1}{1{,}15 \cdot 0{,}54}$

$\iff p = 100 \cdot (\dfrac{1}{1{,}15 \cdot 0{,}54} - 1) \approx 61{,}0306$.

Vastaus: **a)** Pienempi, **b)** 61 prosenttia.

6. Funktion $f(x) = x^3 - 4x + 1$ derivaatta $f'(x) = 3x^2 - 4$. Derivaatan nollakohdat ovat $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1{,}15$. Näistä vain $\frac{2}{\sqrt{3}}$ kuuluu tarkasteluvälille $[-1, 2]$. Nyt $f(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 1 - \frac{16}{3\sqrt{3}} \approx -2{,}08$, $f(-1) = 4$ ja $f(2) = 1$. Näin ollen suurin arvo on $f(-1)$ ja pienin $f(\frac{2}{\sqrt{3}})$.

Vastaus: Suurin arvo on 4 ja pienin $1 - \frac{16}{3\sqrt{3}}$.

7. **a)** Korkeus h jakaa pisimmän sivun kahteen osaan, joiden pituudet olkoot x ja $4-x$. Suorakulmaisista kolmioista saadaan yhtälöt

$h^2 = 2^2 - x^2$ ja $h^2 = 3^2 - (4-x)^2 = -x^2 + 8x - 7$.

Siis $4 - x^2 = -x^2 + 8x - 7 \Longleftrightarrow 8x = 11 \Longleftrightarrow x = \frac{11}{8}$ ja $4 - x = \frac{21}{8}$.

Näin ollen $h^2 = 4 - (\dfrac{11}{8})^2 = \dfrac{135}{64}$ eli $h = \dfrac{3\sqrt{15}}{8} \approx 1{,}4524$.

b) Suorakulmaisista kolmioista saadaan pitkän sivun viereiset kulmat.

$\cos\alpha = \dfrac{x}{2} = \dfrac{11}{16} \Longrightarrow \alpha \approx 46{,}567^{\circ}$, $\cos\beta = \dfrac{4-x}{3} = \dfrac{7}{8} \Longrightarrow \beta \approx 28{,}955^{\circ}$.

Kolmas kulma $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta \approx 104{,}478$.

Vastaus: **a)** 1,45, **b)** 47°, 29° ja 104°.

8. Jäätikön tilavuus kuutiokilometreinä on $V = 3\,668\,000$. Siitä sulaa vedeksi $0{,}3V$. Koska jään tiheys $\rho_J = 0{,}9\,\mathrm{kg/dm}^3$ ja veden $\rho = 1{,}0\,\mathrm{kg/dm}^3$ on tämän vesimäärän tilavuus $V_V = \dfrac{\rho_J}{\rho}0{,}3V = 0{,}9 \cdot 0{,}3V$. Maapallon pinta-ala on $4\pi r^2$, missä $r = 6400$ km. Valtamerien osuus pinta-alasta on $A_V = 0{,}71 \cdot 4\pi 6400^2\,\mathrm{km}^2$. Vedenpinnan nousu on $\dfrac{V_V}{A_V} \approx 0{,}002710\,\mathrm{km} = 2{,}710\,\mathrm{m}$.

Vastaus: 2,7 metriä.

9. Käytössä on 16 merkkiä. Niillä voidaan ilmaista $16^2 = 256$ erilaista kahdella merkillä esitettyä perusväriä. Kolmen perusvärin yhdelmiä on tällöin $(16^2)^3 = 16^6 = 16\,777\,216$ erilaista.

Vastaus: 16 777 216 värisävyä.

10. Jos pistemäärä x noudattaa normaalijakaumaa $N(30,10)$, niin pistemäärä $z = \dfrac{x-30}{10}$ noudattaa normitettua normaalijakaumaa $N(0,1)$. On löydettävä sellainen pistemäärä x_0, että $P(x \geq x_0) \leq 0{,}05$ eli, että $P(x < x_0) > 0,95$. Tällöin normitetussa jakaumassa $N(0,1)$ on oltava $P(z < z_0) > 0,95$, missä $z_0 = \dfrac{x_0 - 30}{10}$. Ehto $\Phi(z_0) = 0{,}95$ antaa $z_0 \approx 1{,}645$. Vastaava pistemäärä $x_0 = 30 + 10 \cdot 1{,}645 = 46{,}45$. Jotta osuus olisi enintään 5 prosenttia, on x_0 pyöristettävä ylöspäin.

Vastaus: 47 pistettä.

11. Koska $D(x^2+4) = 2x$, niin paraabelin tangentin kulmakerroin pisteessä A on $2\cdot 3 = 6$. Pisteeseen A piirretyn tangentin yhtälö on $y - 13 = 6(x-3) \Longleftrightarrow y = 6x - 5$. x-akselin leikkauspiste toteuttaa yhtälön $0 = 6x - 5$, jonka ratkaisu on $x = \frac{5}{6}$.

Kolmion ABC kanta BC on $3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$ ja korkeus AC on 13. Kolmion ala on $\frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{13}{6} = \frac{169}{12} = 14\frac{1}{12}$.

Vastaus: $\frac{169}{12}$.

12. On määrättävä millä arvolla k funktio

$f(k) = (2k - 1{,}5)^2 + (3k - 2{,}6)^2 + (6k - 4{,}6)^2 = 49k^2 - 76{,}8k + 30{,}17$

saa pienimmän arvon. Funktion derivaatta on $f'(k) = 98k - 76{,}8$. Se saa arvon nolla k:n arvolla $k_0 = \dfrac{76{,}8}{98} \approx 0{,}78367$. Koska funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa. Suora on siis $y = k_0x$. Kuviossa se kulkee niin, että $(2; 1{,}5)$ ja $(6; 4{,}6)$ jäävät suoran alapuolelle ja $(3; 2{,}6)$ yläpuolelle.

Vastaus: $k = \dfrac{76{,}8}{98}$.

13. Koska $77 \cdot 13 = 1001$ ja $154 \cdot 13 = 2002$, ovat välillä $[1000, 2000]$ olevat 13:lla jaolliset luvut muotoa $13n$, $n = 77, 78, ..., 153$. Ne muodostavat aritmeettisen lukujonon, jonka lukujen summa on $77 \cdot \dfrac{77 \cdot 13 + 153 \cdot 13}{2} = 115\,115$.

Vastaus: 115 115.

14. Tilanteeseen voidaan soveltaa annuiteettikaavaa $A = Kq^n \dfrac{1-q}{1-q^n}$. Sijoittamalla tähän arvot $A = 2000$ euroa, $K = 7500$ euroa ja $n = 4$, saadaan q:lle yhtälö

$2000 = 7500q^4 \dfrac{1-q}{1-q^4} \iff \dfrac{4}{15} = \dfrac{q^4 - q^5}{1-q^4} \iff q^5 - \frac{19}{15}q^4 + \frac{4}{15} = 0.$

Haarukoimalla nähdään, että yhtälön vasemman puolen arvo, kun $q = 1{,}0260$, on $-0{,}0000225 < 0$ ja kun $q = 1{,}0265$ on $0{,}0000124 > 0$. Näin ollen yhtälöllä on ratkaisu q_0, $1{,}0260 < q_0 < 1{,}0265$. Koska $q = 1 + \dfrac{p}{100}$, on $2{,}60 < p < 2{,}65$ eli $p \approx 2{,}6$.

Vastaus: $p = 2{,}6$.

15. **a)** Jos $\sin x = \frac{1}{3}$, niin $x = x_0 \approx 19{,}471^\circ$ tai $x = 180^\circ - x_0 \approx 160{,}529^\circ$.

b) Jos $\cos x = \frac{1}{4}$, niin $x = x_0 \approx 75{,}522^\circ$ tai $x = 360^\circ - x_0 \approx 284{,}478^\circ$.

c) Jos $\tan x = \frac{1}{5}$, niin $x = x_0 \approx 11{,}310^\circ$ tai $x = 180^\circ + x_0 \approx 191{,}310^\circ$.

Vastaus: **a)** 19° tai 161°, **b)** 76° tai 284°, **c)** 11° tai 191°.