YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2011

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $3x^2 = -x$.

b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 5 ja toisen kateetin pituus 2. Laske toisen kateetin pituus.

c) Ratkaise yhtälö

$$\frac{4x-1}{5} = \frac{x+1}{2} + \frac{3-x}{4}.$$

2. **a)** Sievennä lauseke $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ välivaiheet esittäen.

b) Laske suoran $y = 2x$ ja ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ leikkauspisteet.

c) Olkoon $f(x) = 2^{-x}$. Laske $f'(1)$.

3. **a)** Ratkaise yhtälö $\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 4 + \ln 2$.

b) Ratkaise epäyhtälö

$$\frac{2x+1}{x-1} \geq 3.$$

c) Määritä pisteen $(3,-2)$ etäisyys suorasta $4x - 3y = 2$.

4. **a)** Näytä, että molemmat funktiot

$$F_1(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{ja} \quad F_2(x) = \frac{x}{1-x}$$

ovat funktion

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

integraalifunktioita, kun $x > 1$.

b) Sievennä erotus $F_1(x) - F_2(x)$.

c) Laske funktion $f(x)$ kuvaajan ja x -akselin rajoittaman alueen pinta-ala, kun $2 \leq x \leq 5$.

5. Laske vektoreiden $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$ välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella.

6. **a)** Laske $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

b) Ratkaise epäyhtälö

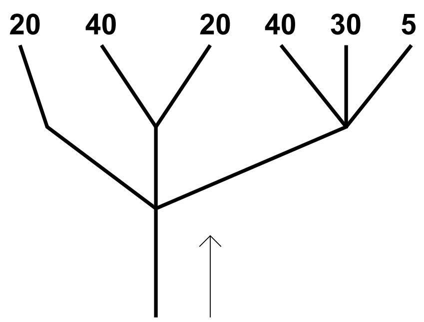
$$\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < 0{,}01.$$

7. Poiseuillen lain (Jean Louis Marie Poiseuille, 1797−1869) mukaan putkessa virtaavan veden virtausnopeus on suoraan verrannollinen putken halkaisijan neljänteen potenssiin, kun muut tilanteeseen liittyvät suureet pysyvät samoina. Kuinka monta prosenttia halkaisijaa on suurennettava, jos virtausnopeus halutaan kaksinkertaistaa?

8. Eräässä tietokonepelissä pelaaja etenee ylimmälle tasolle oheisen kaavion mukaisesti ja saa kaavioon merkityn pistemäärän. Jokaisessa risteyksessä hän valitsee satunnaisesti yhden tasavertaisista vaihtoehdoista ja etenee seuraavalle tasolle ylöspäin.

a) Millä todennäköisyydellä pelaaja saavuttaa suurimman pistemäärän 40?

b) Määritä pistemäärän odotusarvo.



9. **a)** Näytä, että funktiolla $f(x) = x^2 - 2x$ on käänteisfunktio, kun $x \geq 1$.

b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ lauseke.

c) Piirrä funktion $f(x)$ ja sen käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ kuvaajat samaan koordinaatistoon.

10. Määritä funktion $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2$ nollakohdat sekä suurin ja pienin arvo.

11. Lukujonon (a_n) termit ovat muotoa

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

a) Näytä, että $0 < a_n < \frac{1}{2}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots.$

b) Näytä, että $a_{n+1} > a_n$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots.$

c) Määritä $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

12. Isaac Newton esitti vuonna 1669 nimeään kantavan menetelmän, jonka avulla funktioiden nollakohtia voidaan laskea numeerisesti. Yhtenä esimerkkinä menetelmänsä toimivuudesta hän käytti polynomia $f(x) = x^3 - 2x - 5.$

a) Laske $f'(x)$.

b) Näytä, että Newtonin tutkimalla yhtälöllä $f(x) = 0$ on ratkaisu välillä $[2, 3]$.

c) Laske ratkaisulle neljän iteraatioaskeleen approksimaatio Newtonin menetelmällä lähtien alkuarvosta $x_0 = 2.$ Ilmoita vastaus neljän desimaalin tarkkuudella.

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\lg 50$ ei ole rationaaliluku. $(\lg = \log_{10})$

***14.** Olkoon $f(x) = ax + b.$

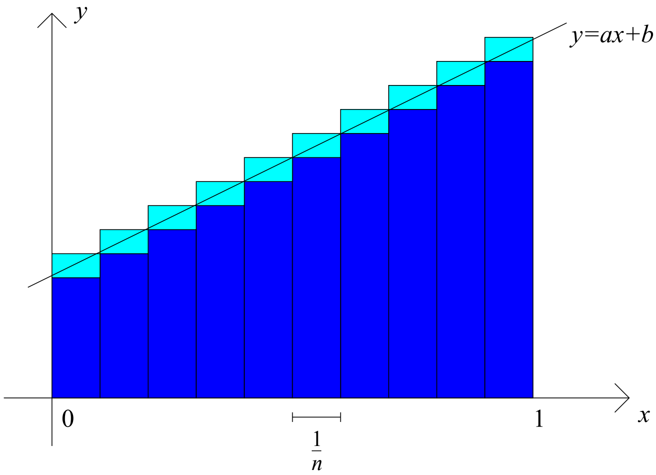
a) Laske $\int_0^1 f(x)\,dx.$ (2 p.)

b) Johda lausekkeet summille

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad \text{ja} \quad s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right),$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots.$ (4 p.)

c) Laske raja-arvot $\lim_{n\to\infty} S_n$ ja $\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n).$ (3 p.)



***15.** Merkitään kolmion ABC keskijanojen AD ja BE leikkauspistettä kirjaimella P.

a) Jos F on janan AP keskipiste ja G janan BP keskipiste, niin osoita, että janan FG pituus on puolet janan AB pituudesta. (2 p.)

b) Osoita, että nelikulmio $FGDE$ on suunnikas. (2 p.)

c) Osoita, että janan DP pituus on kolmasosa janan AD pituudesta. (2 p.)

d) Todista edellisten kohtien perusteella seuraava lause: Kolmion keskijanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka jakaa jokaisen keskijanan siten, että sivun puoleisen osan pituus on kolmasosa koko keskijanan pituudesta. (3 p.)