Pitkä matematiikka 28.9.2011, ratkaisut:

1. **a)** $3x^2 = -x \iff x(3x+1) = 0 \iff x = 0$ tai $x = -\frac{1}{3}$.

b) Toisen kateetin pituus on $\sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$.

c) $\dfrac{4x-1}{5} = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{3-x}{4} \iff 4(4x-1) = 10(x+1) + 5(3-x) \iff 11x = 29$
$\iff x = \frac{29}{11}$.

Vastaus: **a)** $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{3}$, **b)** $x = \sqrt{21}$, **c)** $x = \frac{29}{11}$.

2. **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2} = 1.$

b) Leikkauspisteen x-koordinaatille pätee $x^2 + (2x)^2 = 1 \iff 5x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Nyt $y = 2x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Leikkauspisteet ovat $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

c) $f'(x) = -2^{-x}\ln 2$, joten $f'(1) = -2^{-1}\ln 2 = -\frac{1}{2}\ln 2$.

Vastaus: **a)** 1, **b)** $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ ja $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$, **c)** $-\frac{1}{2}\ln 2$.

3. **a)** Yhtälö on määritelty, kun $x > 1$. Sievennetään yhtälöä:
$\ln(x+1) - \ln(x-1) = \ln 4 + \ln 2 \iff \ln\dfrac{x+1}{x-1} = \ln(4\cdot 2)$. Tästä saadaan edelleen
$\dfrac{x+1}{x-1} = 8 \iff x+1 = 8x - 8 \iff x = \frac{9}{7}$. Koska $\frac{9}{7} > 1$, on se ratkaisu.

b) $\dfrac{2x+1}{x-1} \geq 3 \iff \dfrac{2x+1-3(x-1)}{x-1} \geq 0 \iff \dfrac{4-x}{x-1} \geq 0$. Nyt $4 - x = 0$, kun $x = 4$ ja $x - 1 = 0$, kun $x = 1$. Merkkitarkastelulla nähdään, että epäyhtälö toteutuu, kun $1 < x \leq 4$.

c) Etäisyys on $d = \dfrac{|4\cdot 3 - 3(-2) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \dfrac{16}{5} = 3\dfrac{1}{5}$.

Vastaus: **a)** $\frac{9}{7}$, **b)** $1 < x \leq 4$, **c)** $\frac{16}{5}$.

4. **a)** Kun $x > 1$, on $F_1'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = f(x)$ ja $F_2'(x) = \dfrac{1-x+x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2} = f(x)$.
Näin ollen molemmat ovat $f(x)$:n integraalifunktioita.

b) $F_1(x) - F_2(x) = \dfrac{1-x}{1-x} = 1$.

c) Pinta-ala on $\int_2^5 \dfrac{1}{(1-x)^2}\,dx = \Big/_{2}^{5} \dfrac{1}{1-x} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$.

Vastaus: **b)** 1, **c)** $\frac{3}{4}$.

5. Nyt $\overline{a}\cdot\overline{b} = 2\cdot 3 - 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 6$, $|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + 1 + 2^2} = 3$ ja $|\overline{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{14}$.
Jos $\alpha = \angle(\overline{a}, \overline{b})$, on $\cos\alpha = \dfrac{6}{3\sqrt{14}} \approx 0{,}53452248$, josta $\alpha \approx 57{,}68847^\circ$.

Vastaus: $57{,}7^\circ$.

6. **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$

b) Edellisen mukaan $\dfrac{x^2-4}{x-2}-4=x+2-4=x-2$, kun $x\neq 2$. Epäyhtälö on siten muotoa $|x-2|<0{,}01 \iff -0{,}01<x-2<0{,}01 \iff 1{,}99<x<2{,}01$.

Vastaus: **a)** 4, **b)** $1{,}99<x<2$ tai $2<x<2{,}01$.

7. Virtausnopeuden v ja putken halkaisijan d neljännen potenssin suhde on vakio. Jos halutaan kaksinkertaistaa virtausnopeus kasvattamalla putken halkaisijaa p prosenttia, saadaan yhtälö $\dfrac{2v}{((1+\frac{p}{100})d)^4}=\dfrac{v}{d^4}\iff\dfrac{2}{(1+\frac{p}{100}))^4}=1\iff 1+\dfrac{p}{100}=\sqrt[4]{2}.$ Siis $p=100(\sqrt[4]{2}-1)\approx 18{,}92071$.

Vastaus: 18,9 prosenttia.

8. **a)** Jos polku haarautuu kahtia, kummankin haaran todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ ja jos haarautuu kolmeen osaan, kunkin todennäköisyys on $\frac{1}{3}$. Tällöin 40:n todennäköisyys on $P(40)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$.

b) Muiden pistemäärien todennäköisyyksiksi saadaan

$P(5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9},\ \ P(20)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \ P(30)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$

Odotusarvo on $E=\frac{1}{9}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 20+\frac{1}{9}\cdot 30+\frac{5}{18}\cdot 40=\frac{450}{18}=25.$

Vastaus: **a)** $\frac{5}{18}$, **b)** 25.

9. **a)** Funktion derivaatta on $f'(x)=2x-2=2(x-1)$. Selvästi $f'(x)>0$, kun $x>1$ ja $f'(1)=0$. Näin ollen $f(x)$ on monotonisesti kasvava, kun $x\geq 1$, joten sillä on käänteisfunktio, kun $x\geq 1$.

b) Jos $y=x^2-2x\iff x^2-2x-y=0$, on $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+4y}}{2}=1\pm\sqrt{1+y}$. Miinus-merkki ei kelpaa, koska on oltava $x\geq 1$. Siis käänteisfunktion lauseke on $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1+x}$, kun $x\geq -1$.

c) Funktion kuvaaja $y=f(x)$ on paraabeli, jonka huippu on pisteessä $(1,-1)$. Käänteisfunktion kuvaaja $y=f^{-1}(x)$ on sen kanssa symmetrinen suoran $y=x$ suhteen. Kuvaajat leikkaavat pisteessä $(3,3)$.

10. Nyt $f(x)=3\cos^2 x-\sin^2 x-2=3\cos^2 x-(1-\cos^2 x)-2=4\cos^2 x-3$. Siis $f(x)=0$, kun $\cos^2 x=\frac{3}{4}\iff\cos x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nyt $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\iff x=\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ja $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\iff x=\pm\frac{5\pi}{6}+2n\pi,\ n\in\mathbf{Z}$.

Koska $\cos^2 x$:n suurin arvo on 1 ja pienin 0 on $f(x)$:n suurin arvo $4\cdot 1-3=1$ ja pienin arvo $4\cdot 0-3=-3$.

Vastaus: Nollakohdat ovat $\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$ ja $\pm\frac{5\pi}{6}+2n\pi$. Suurin arvo on 1 ja pienin -3.

11. **a)** Koska $n>0$, myös $a_n=\dfrac{n}{2n+1}>0$. Koska $2n<2n+1$, on $\dfrac{2n}{2n+1}<1\iff$ $\dfrac{n}{2n+1}<\dfrac{1}{2}\iff a_n<\dfrac{1}{2}$. Siis $0<a_n<\frac{1}{2},\ n=1,2,3,...$

b) $a_{n+1}-a_n=\dfrac{n+1}{2n+3}-\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{(2n+1)(n+1)-n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}>0.$ Siis $a_{n+1}>a_n,\ n=1,2,3,....$

c) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+1/n}=\dfrac{1}{2}.$

12. **a)** $f'(x) = 3x^2 - 2$.

b) Koska $f(x)$ on jatkuva, $f(2) = -1 < 0$ ja $f(3) = 16 > 0$, on $f(x)$:llä ainakin yksi nollakohta välillä $[2, 3]$.

c) Newtonin menetelmä saa nyt muodon $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$, $n = 0, 1, \ldots$. Lähtemällä arvosta $x_0 = 2$ saadaan $x_1 = 2{,}1$, $x_2 \approx 2{,}094568121$, $x_3 \approx 2{,}094551482$, $x_4 \approx 2{,}094551482$. Koska $x_4 = x_3$ yhdeksän desimaalin tarkkudella, on kysytty likiarvo $x = 2{,}0946$.

13. Vastaoletus: $\lg 50$ on rationaaliluku. Koska $\lg 50 = \lg 5 \cdot 10 = \lg 5 + \lg 10 = \lg 5 + 1$, on tällöin myös $\lg 5$ rationaaliluku eli on olemassa luonnolliset luvut m ja n siten, että $\lg 5 = \dfrac{m}{n} \iff 5 = 10^{\frac{m}{n}} \iff 5^n = 10^m$. Tämä on mahdotonta, sillä 5^n on aina pariton ja 10^m parillinen luku. Siis vastaoletus on väärä eikä $\lg 50$ ole rationaaliluku.

***14.** **a)** $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \mathop{/}\limits_0^1 \frac{1}{2}ax^2 + bx = \frac{1}{2}a + b$.

b) $f(\dfrac{i+1}{n}) - f(\dfrac{i}{n}) = a \cdot \dfrac{i+1}{n} - a \cdot \dfrac{i}{n} = \dfrac{a}{n}$. Tulos ei riipu i:stä, joten $(f(\dfrac{i}{n}))$ on aritmeettinen jono. Näin ollen

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \frac{n}{n} \cdot \frac{f(\frac{1}{n}) + f(1)}{2} = \frac{a \cdot \frac{1}{n} + b + a + b}{2} = (1 + \frac{1}{n})\frac{a}{2} + b,$$

Vastaavasti

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i-1}{n}) = \frac{f(0) + f(1 - \frac{1}{n})}{2} = \frac{b + a(1 - \frac{1}{n}) + b}{2} = (1 - \frac{1}{n})a + b.$$

c) $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} ((1 + \dfrac{1}{n})\dfrac{a}{2} + b) = \dfrac{a}{2} + b$,

$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} ((1 + \dfrac{1}{n})\dfrac{a}{2} - (1 - \dfrac{1}{n})\dfrac{a}{2}) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}a = 0.$

***15.** **a)** Kolmiot FGP ja ABP ovat yhdenmuotoiset (kaksi sivua ja välinen kulma) suhteen ollessa 1:2. Näin ollen vastinsivuina $FG = \frac{1}{2}AB$.

b) Pisteestä E piirretty AB:n suuntainen suora puolittaa BC:n eli kulkee D:n kautta. Näin ollen ED ja AB ovat yhdensuuntaiset. Vastaavasti nähdään, että FG ja AB ovat yhdensuuntaiset eli ED ja FG ovat yhdensuuntaiset. Edelleen, kolmiot EDC ja ABC ovat yhdenmuotoiset (kaksi sivua ja välinen kulma) suhteen ollessa 1:2. Näin ollen $ED = \frac{1}{2}AB$ eli $ED = FG$. Koska sivut ED ja FG ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, nelikulmio $FGDE$ on suunnikas.

c) Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, joten $DP = PF = FA$ eli $DP = \frac{1}{3}AD$.

d) Edellisen mukaan B:stä piirretty keskijana leikkaa A:sta piirretyn keskijanan pisteessä, jonka etäisyys D:stä on $\frac{1}{3}AD$. Vastaavasti nähdään, että sama pätee C:stä piirretylle keskijanalle, sekin leikkaa A:sta piirretyn keskijanan pisteessä, jonka etäisyys D:stä on $\frac{1}{3}AD$. Näin ollen myös C:stä piirretty keskijana kulkee pisteen P kautta. Edellisen mukaan nähdään, että piste P jakaa kaikki keskijanat suhteessa 1:3. Lause on todistettu.