Lyhyt matematiikka 28.9.2012, ratkaisut:

1. **a)** $x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0$ tai $x = 2$.

b) $\dfrac{2}{3}x - 1 = \dfrac{2}{3} \iff 2x - 3 = 2 \iff x = \dfrac{5}{2}$.

c) Kertomalla jälkimmäinen yhtälö kahdella ja laskemalla yhteen saadaan $5x = -10$ eli $x = -2$. Siitä $y = 2(-2) + 3 = -1$.

Vastaus: **a)** $x = 0$ tai $x = 2$, **b)** $x = \frac{5}{2}$, **c)** $x = -2$, $y = -1$.

2. **a)** Suolapitoisuusprosentti on $100 \cdot \dfrac{9{,}0}{250} = 3{,}6$.

b) Toisen kateetin pituus on $\sqrt{4{,}9^2 - 2{,}3^2} = \sqrt{18{,}72} \approx 4{,}3267$ (m).

c) Suoran yhtälö on $y - 0 = \dfrac{8-0}{0-12}(x - 12) \iff y = -\dfrac{2}{3}(x-12) \iff y = -\dfrac{2}{3}x + 8$.

Vastaus: **a)** 3,6%, **b)** 4,3 m, **c)** $y = -\dfrac{2}{3}x + 8$.

3. **a)** $f(x) = x(x+2)^2 = x^3 + 4x^2 + 4x$, joten $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$. Siis $f'(0) = 4$.

b) $2^{3x+1} = 32 \iff 2^{3x+1} = 2^5 \iff 3x + 1 = 5 \iff x = \dfrac{4}{3}$.

c) $\log_4(3x) = 3 \iff 3x = 4^3 \iff x = \dfrac{64}{3}$.

Vastaus: **a)** $f'(0) = 4$, **b)** $x = \frac{4}{3}$, **c)** $x = \frac{64}{3}$.

4. **a)** Leikkauspisteiden x-koordinaateille pätee $x^2 - 12x + 35 = 0$. Yhtälön ratkaisu on $x = \dfrac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 35}}{2} = \dfrac{12 \pm 2}{2} = 6 \pm 1$ eli $x = 5$ tai $x = 7$.

b) Huipussa $D(x^2 - 12x + 35) = 0 \iff 2x - 12 = 0 \iff x = 6$. Toinen koordinaatti on $y = 6^2 - 12 \cdot 6 + 35 = -1$.

Vastaus: **a)** Pisteissä $(5,0)$ ja $(7,0)$, **b)** $(6,-1)$.

5. **a)** $\sum_{n=0}^{22}(3 + 4n) = 23 \cdot \dfrac{3 + (3 + 4 \cdot 22)}{2} = 23 \cdot 47 = 1081$.

b) $\sum_{n=2}^{15}(-3)^n = (-3)^2 \cdot \dfrac{1 - (-3)^{14}}{1 - (-3)} = -10\,761\,678$.

Vastaus: **a)** 1081, **b)** $-10\,761\,678$.

6. Amerikkalaisen auton kulutus litroina/(100 km) on $\dfrac{3{,}785}{0{,}01 \cdot 1{,}609 \cdot 32} = 7{,}3512 > 6{,}8$.

Vastaus: Japanilainen auto kuluttaa vähemmän.

7. a)

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$	0,622	0,850	1,000	1,234	2,281
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
$\sqrt{y}$	0,622	0,850	1,000	1,234	2,281

b) Kaava on $\sqrt{y} = \sqrt[3]{x}$ eli $y = (\sqrt[3]{x})^2$ eli $y = x^{2/3}$.

c) Etäisyys on $29{,}457^{2/3} \approx 9{,}538$ astronomista yksikköä.

8. a) Täytteistä voidaan valita 2 erilaista $\binom{15}{2} = 105$ eri tavalla ja 3 erilaista $\binom{15}{3} = 455$ eri tavalla. Täyte voidaan siis valita kaikkiaan 560 eri tavalla. Pohjia on 3 erilaista, joten erilaisia pitsoja on kaikkiaan $3 \cdot 560 = 1680$. Näiden syömiseen yksi päivässä viitenä päivänä viikossa menee $\dfrac{1680}{5} = 336$ viikkoa eli noin 6,5 vuotta.

b) Erilaiset pitsat maksavat yhteensä $560(7{,}5 + 8{,}5 + 10{,}5) + 455 \cdot 3 = 16\,205$ (euroa), joten pitsan keskimääräinen hinta on $\dfrac{16\,205}{1680} \approx 9{,}6458$ (euroa).

Vastaus: **a)** 336 viikkoa, **b)** 9,65 euroa.

9. a) Jos kuusikulmion kaksi vierekkäistä kärkeä yhdistetään keskipisteeseen, syntyy tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on r. Tästä näkyy, että leveys $x = 2r$.

b) Yhdistämällä kolme vierekkäistä kärkeä keskipisteeseen saadaan kaksi tasasivuista kolmiota, joissa sivun pituus on r. Kuusikulmion korkeus y on näiden kolmioiden korkeuksien summa eli $y = 2 \cdot \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

c) Kuusikulmio jakautuu kärjistä keskipisteeseen piirretyillä janoilla kuuteen tasasivuiseen kolmioon, joiden pinta-alojen summa on $6 \cdot \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2}$. Kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen ala on $\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2} - \pi(\dfrac{r}{2})^2 = r^2(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{4})$.

Vastaus: **a)** $x = 2r$, **b)** $y = r\sqrt{3}$, **c)** pinta-ala on $r^2(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{4})$.

10. Leikataan kartiota sen korkeusjanan kautta kulkevalla tasolla, jolloin syntyy kolmio ja sen sisällä oleva suorakulmio. Suorakulmion kummallakin puolella on suorakulmainen kolmio, jonka korkeus on lieriön korkeus d ja kanta $d/2$. Kartion korkeusjana jakaa suorakulmion yläpuolella olevan kolmion kahdeksi kolmioksi, jotka ovat yhteneviä suorakulmion vieressä olevien kolmioiden kanssa. Näin ollen niidenkin korkeus on d. Siitä saadaan kartion korkeudeksi $2d$. Kartion pohjaympyrän säde on d, joten kartion tilavuus $V_K = \dfrac{1}{3}\pi d^2 \cdot 2d$. Lieriön tilavuus $V_L = \pi(\dfrac{d}{2})^2 d$. Tilavuuksien suhde on $\dfrac{V_L}{V_K} = \dfrac{\pi d^3}{4} \cdot \dfrac{3}{2\pi d^3} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$.

Vastaus: 37,5 %.

11. **a)** Naisen pituudelle x pätee $41 = 0{,}43x - 27$, josta $x = \dfrac{41 + 27}{0{,}43} \approx 158{,}1395$ (cm).

b) Miehen sääriluun pituus on mallin mukaan $y = 0{,}45 \cdot 175 - 31 = 47{,}75 >> 42$. Näin ollen kyseessä ei ole saman henkilön sääriluu.

Vastaus: **a)** 158 cm, **b)** ei ole.

12. Väkiluvun v malli on $v = Ce^{at}$, missä t on aika vuosina vuodesta 2004 ja a sekä C parametreja, jotka pitäisi määrätä.
Vuoden 2004 väkiluvusta saadaan $6{,}4 = Ce^{a \cdot 0} \Longrightarrow C = 6{,}4$.
Vuoden 2010 väkiluvusta saadaan nyt $6{,}8 = 6{,}4e^{6a} \Longleftrightarrow e^{6a} = \dfrac{6{,}8}{6{,}4}$. Ottamalla logaritmit saadaan $6a \ln e = \ln \dfrac{6{,}8}{6{,}4}$, josta $a = \dfrac{1}{6} \ln \dfrac{6{,}8}{6{,}4} \approx 0{,}010104$. Jos väkiluku ylittää 10 miljardia vuonna $2004 + t$, on $10 < 6{,}4e^{at} \Longleftrightarrow t > \dfrac{1}{a} \ln \dfrac{10}{6{,}4} \approx 44{,}169$. Siis vuosi on $2004 + 45 = 2049$.

Vastaus: Vuonna 2049.

13. Karoliina saa lähdeveron maksamisen jälkeen korkoa $10\,000 \cdot 0{,}022 \cdot 0{,}70 = 154$ (euroa), joten hänellä on vuoden päästä 10 154 euroa.

Petteri saa ensimmäisestä talletuksesta puolen vuoden jälkeen korkoa lähdeveron maksamisen jälkeen $10\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}0235 \cdot 0{,}70 = 82{,}25$ (euroa), joten hänellä on silloin pääomaa 10 082,25 euroa. Toisen puolen vuoden talletuksen korko on lähdeveron maksamisen jälkeen $10\,082{,}25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}020 \cdot 0{,}70 = 70{,}58$ (euroa), joten hänellä on silloin pääomaa $10\,082{,}25 + 70{,}58 = 10\,152{,}83$ (euroa), mikä jää alle Karoliinan pääoman.

Vastaus: Karoliina teki paremman sijoituksen ja sen arvo oli 10 154 euroa.

14. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan muunnoksella $z = \dfrac{x - 0{,}215}{0{,}005}$. Tässä jakaumassa lisäaineen pitoisuuden sallittu raja on $z_0 = \dfrac{0{,}225 - 0{,}215}{0{,}005} = 2$.

Nyt $P(x \leq 0{,}225) = P(z \leq 2) = \Phi(2) = 0{,}9772$, joten $P(x > 0{,}225) = P(z > 2) = 1 - \Phi(2) = 0{,}0228$.

Vastaus: Todennäköisyydellä 0,0228.

15. Vektori $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = 7\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k} - (6\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}) = \bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$.
Paikkavektori $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{BC} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k} + (\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}) = 5\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k}$.
Lävistäjävektori $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 7\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k} - (4\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}) = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$.
Lävistäjävektori $\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = 5\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k} - (6\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}) = -\bar{i} + \bar{j}$.

Vastaus: $\overline{OD} = 5\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k}$, $\overline{AC} = 3\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$, $\overline{BD} = -\bar{i} + \bar{j}$.