



MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 25.9.2013 HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden ja sisältöjen luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintotoimikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinrusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintä, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Tehtävä 1

- a) $x^2 - 4x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$.
- b) $2x + 3 = -(x + 3) \Leftrightarrow 2x + 3 = -x - 3 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$.
- c) $2(-2 - 2) + (2 + 2)^2 + 2(1 - 2) = -8 + 16 - 2 = 6$.

Tehtävä 2

- a) Leikkauspiste y -akselilla saadaan sijoittamalla $x = 0$ yhtälöön $y = -3x + 12$, joten leikkauspiste on $(0, 12)$. Leikkauspiste x -akselilla saadaan sijoittamalla $y = 0$ yhtälöön $y = -3x + 12$, joten leikkauspiste on $(4, 0)$.
- b) Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä $y = 4 - 2x$ ja sijoitetaan alempaan. Näin saadaan $-x + 8 - 4x = 1 \Leftrightarrow -5x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$. Tällöin $y = 4 - 2x = 4 - \frac{14}{5} = \frac{6}{5}$.

Ratkaisu on $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$.

- c) Uusi kanta on $0,8 \cdot 11 = 8,8$ ja uusi korkeus $1,2 \cdot 7 = 8,4$. Alkuperäisen suorakulmion ala on $11 \cdot 7 = 77$ ja uuden ala on $8,8 \cdot 8,4 = 73,92$. Alojen suhde on $\frac{73,92}{77} = 0,96$, joten ala pienenee 4 %.

Tehtävä 3

- a) Olkoon huippukulman puolikas α . Kannan puolikas on 20 m ja

$$\sin \alpha = \frac{20}{90} \approx 0,2222 \Rightarrow \alpha \approx 12,84^\circ, \text{ joten huippukulma on } 2\alpha \approx 26^\circ.$$

- b) Olkoon kolmion korkeus h . Tällöin $\cos \alpha = \frac{h}{90} \Rightarrow h = 90 \cos \alpha \approx 87,75$.

$$\text{Pinta-ala on } \frac{40h}{2} = 20h \approx 1755 \text{ m}^2.$$

Tehtävä 4

Rimaa tarvitaan yhteensä $10y + 20x + \pi x + 2\pi x = 10y + (20 + 3\pi)x$
 $= 10 \cdot 40 + (20 + 3\pi) \cdot 20 = 800 + 60\pi$, siis noin 988 cm.

Tehtävä 5

Pisteet $(-1,0)$, $(1,-2)$ ja $(3,0)$ ovat käyrällä, joten
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}.$$
 Vähentämällä kaksi

ensimmäistä yhtälöä puolittain saadaan $-2b = 2 \Leftrightarrow b = -1$. Sijoittamalla $b = -1$ saadaan

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 9a + c = 3 \end{cases}.$$
 Vähentämällä yhtälöt puolittain saadaan $-8a = -4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Siis

$$c = b - a = -\frac{3}{2}.$$

Tehtävä 6

Rullan ulkosäde on $R = 6$, sisäsäde $r = 2,25$, ja olkoon kysytyn rullan säde ρ . Täyden rullan tilavuus on $V_t = 21\pi(R^2 - r^2)$ ja kysytyn rullan tilavuus $V_p = 21\pi(\rho^2 - r^2)$. Tilavuudesta on jäljellä puolet, kun

$$21\pi(\rho^2 - r^2) = \frac{21}{2}\pi(R^2 - r^2) \Leftrightarrow \rho^2 = \frac{R^2 + r^2}{2}.$$

Kysytyn rullan halkaisija on $2\rho = 2\sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}} = \sqrt{82,125} \text{ cm} \approx 9,1 \text{ cm}.$

Tehtävä 7

a) Jarrutusmatkan lauseke nopeuden v avulla on $s(v) = kv^2$, jossa oleva vakio k saadaan yhtälöstä $s(40) = k \cdot 40^2 = 11 \Leftrightarrow k = \frac{11}{1600}$. Kysytty jarrutusmatka on $s(80) = \frac{11}{1600} \cdot 80^2 \text{ m} = 44,0 \text{ m}$.

b) Nopeus saadaan yhtälöstä $21,3 = kv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{21,3 \cdot 1600}{11}} \text{ km/h} \approx 56 \text{ km/h}$.

Tehtävä 8

Oletetaan, että valkoisia palloja on n ja punaisia p kappaletta, jolloin palloja on yhteensä $n + p$ kappaletta. Punaisen pallon todennäköisyys on

$$\frac{p}{p+n} = 0,4 \Leftrightarrow 5p = 2p + 2n \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}n.$$

Tehtävä 9

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$, josta $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$. Derivaatan nollakohdat saadaan yhtälöstä $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$, jotka ovat molemmat välillä $[-2, 4]$. Koska $f(-2) = 1$, $f(-1) = 12$, $f(2) = -15$ ja $f(4) = 37$, niin suurin arvo on 37 ja pienin -15.

Tehtävä 10

Olkoon vuotuinen kasvukerroin q ja liikevaihto L . Yhtälöstä $q^{20}L = 10L$ saadaan $q^{20} = 10 \Leftrightarrow q = \sqrt[20]{10} \approx 1,122$, joten vuotuinen kasvu on ollut noin 12,2 %.

Tehtävä 11

Taulukon

arvosana	lukumäärä	summa
10	n	$10n$
9	$2n$	$18n$
8	$3n$	$24n$
summa	$6n$	$52n$

perusteella keskiarvo on $\frac{52n}{6n} \approx 8,7$.

Tehtävä 12

- a) Kun $a = 19$, niin $T = 196 + k \lg \frac{19}{35} \approx 143$ cm.
Kun $a = 23$, niin $T = 200 + k \lg \frac{23}{35} \approx 163$ cm.
Kun $a = 40$, niin $T = 175 + k \lg \frac{40}{35} \approx 187$ cm.

- b) Yhtälöstä $175 + k \lg \frac{a}{35} = 233$ saadaan

$$\lg \frac{a}{35} = \frac{233 - 175}{k} \approx 0,288 = b \Leftrightarrow \frac{a}{35} = 10^b \Leftrightarrow a = 35 \cdot 10^b \approx 67,93.$$

Tulos 175 cm olisi hypättävä 68-vuotiaana.

Tehtävä 13

Tehtävän tiedoista saadaan taulukko

	määrä/kpl	yhteisarvoarvo/€	yhteispaino/g
kultarahoja	k	$25k$	$20k$
hopearahoja	h	$20h$	$10h$
yhteensä	$k + h$	$25k + 20h$	$20k + 10h$

$$\text{Rajoitusehdot ovat } \begin{cases} k + h \leq 60 \\ 20k + 10h \leq 1000 \\ k \geq 0, h \geq 0. \end{cases}$$

Reunasuorat $h = 60 - k$ ja $h = 100 - 2k$ leikkaavat, kun $60 - k = 100 - 2k$
 $\Leftrightarrow k = 40$, jolloin $h = 20$. Kulmapisteet ovat $(0, 0)$, $(0, 60)$, $(40, 20)$ ja $(50, 0)$. Pussilisen arvo on $A(k, h) = 25k + 20h$. Koska

$$A(0, 60) = 20 \cdot 60 = 1200,$$

$$A(40, 20) = 1000 + 400 = 1400 \text{ ja}$$

$$A(50, 0) = 50 \cdot 25 = 1250,$$

niin kannattaa kerätä 40 kulta- ja 20 hopearahaa.

Tehtävä 14

- a) Sijoituksen arvo euroissa on $y = 1,035x + 1,055(12000 - x)$
 $= -0,02x + 12660$, kun $0 \leq x \leq 12000$.
- b) Kuvaaja on laskevan suoran osa välillä $0 \leq x \leq 12000$.

Tehtävä 15

a) Koska $|\bar{a}|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ ja $|\bar{b}|^2 = 1 + 4 = 5$, niin $2|\bar{a}|^2 + 2|\bar{b}|^2 = 18 + 10 = 28$.

b) Koska $\bar{a} + \bar{b} = \bar{i} + 3\bar{j}$, niin $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = 1 + 9 = 10$. Koska $\bar{a} - \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + 4\bar{k}$,
niin $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = 1 + 1 + 16 = 18$. Siis $|\bar{a} + \bar{b}|^2 + |\bar{a} - \bar{b}|^2 = 28$.