Ylioppilastutkintolautakunta
Studentexamensnämnden

MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 25.9.2013
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden ja sisältöjen luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Tehtävä 1

a) $x^2+6x=2x^2+9 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3.$

b) $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow (1+x)(1+x^2)=(1-x)(1-x^2)$

$\Leftrightarrow x^3+x^2+x+1=x^3-x^2-x+1 \Leftrightarrow 2x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1.$

c) Nollakohdat saadaan yhtälöstä

$$x^2-9x+14=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=7,$$

joten $x^2-9x+14=(x-2)(x-7).$

Tehtävä 2

a) $P(x)=x^4-x^3+x \Rightarrow P'(x)=4x^3-3x^2+1.$ Saadaan yhtälö $4x^3-3x^2+1=1$

$\Leftrightarrow x^2(4x-3)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \vee 4x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3}{4}.$

b) $\int (4x+\cos(4x))dx = 2x^2 + \frac{1}{4}\sin(4x) + C.$

c) Luku a on 25 % pienempi kuin b, joten $a = 0,75b.$ Lukujen suhde on $\frac{b}{a} = \frac{b}{0,75b} = \frac{4}{3} \approx 1,33.$ Luku b on noin 33 % suurempi kuin $a.$

Tehtävä 3

a) Olkoon kysytty kulma $\varphi.$ Koska $|\overline{a}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$ $|\overline{b}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ ja $\overline{a} \cdot \overline{b} = 3-2 = 1,$ niin

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} \approx 0,1414,$$

josta $\varphi \approx 81,9^\circ.$

b) $\overline{a} \,||\, \overline{c} \Leftrightarrow \overline{c} = k\overline{a}$ jollakin $k \in \mathbf{R} \Leftrightarrow s\overline{i} + (1-s)\overline{j} = k\overline{i} - 2k\overline{j} \Leftrightarrow \begin{cases} s = k \\ 1-s = -2k \end{cases}$

Sijoittamalla $k = s$ alempaan yhtälöön saadaan $1-s = -2s \Leftrightarrow s = -1.$

Tehtävä 4

Jos $k = 0$, niin käyrät ovat samat, joten tangentit eivät ole kohtisuorassa. Kun $k \neq 0,$ niin leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan yhtälöstä $kx^2 = k(x-2)^2 \Leftrightarrow x-2 = \pm x$ $\Leftrightarrow -2 = 0 \vee 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$ Derivaatan avulla tangenttien kulmakertoimiksi leikkauspisteessä saadaan $2k$ ja $-2k.$ Kohtisuoruusehto on $2k\cdot(-2k) = -1 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm\frac{1}{2}.$

Tehtävä 5

Suuntavektorit ja niiden pituudet ovat $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}$, $|\overline{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3,$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} - 4\overline{k}$, $|\overline{b}| = \sqrt{9+16} = 5.$ Lähtöpisteen paikkavektori on $\overrightarrow{OA} = \overline{i} - \overline{j}.$ Koska $|\overline{a}| = 3,$ niin ensimmäinen siirtymävektori on $3\overline{a}.$ Koska $|\overline{b}| = 5,$ niin toinen siirtymävektori on $2\overline{b}.$ Täten $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 3\overline{a} + 2\overline{b} = (\overline{i} - \overline{j}) + 3(\overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}) + 2(3\overline{i} - 4\overline{k})$ $= 10\overline{i} - 7\overline{j} - 2\overline{k}$, joten $C = (10,-7,-2).$

Tehtävä 6

Kulmanpuolittajalauseen nojalla saadaan $CA = 4x$ ja $CB = 3x$. Olkoon α puolet kulmasta BCA. Kosinilauseen nojalla

$$\begin{cases} 4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6\cos\alpha \\ 3^2 = (3x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 3x \cdot 6\cos\alpha. \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö 3:lla ja alempi -4:llä ja lasketaan puolittain yhteen.
Näin saadaan $12 = 12x^2 - 36 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Vain $x = 2$ kelpaa, joten $AC = 4x = 8$ ja $BC = 3x = 6$.

Tehtävä 7

Koska $x^3 - x = x(x+1)(x-1)$, niin lausekkeen nollakohdat ovat -1, 0 ja 1, joten sen merkki vaihtuu välillä $[0,2]$ vain kohdassa $x = 1$. Merkkitutkimus osoittaa, että $x^3 - x \le 0$, kun $0 \le x \le 1$, ja $x^3 - x \ge 0$, kun $1 \le x \le 2$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left| x^3 - x \right| dx &= \int_0^1 (-x^3 + x)dx + \int_1^2 (x^3 - x)dx \\ &= \Big/_0^1 \left(-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 \right) + \Big/_1^2 \left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 \right) = 2\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehtävä 8

Jos molempina päivinä osallistui x ritaria, niin vain ensimmäisenä päivänä osallistui $302 - x$ ritaria ja vain toisena päivänä $285 - x$ ritaria. Osallistujia oli yhteensä 329, joten $(302 - x) + x + (285 - x) = 329 \Leftrightarrow x = 258$, joten kysytty todennäköisyys on $\dfrac{258}{329} \approx 78\,\%$.

Tehtävä 9

Käyrien leikkauskohdat saadaan yhtälöstä $2e^{-x} = x^2 e^{-x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Janan pituus on $f(x) = 2e^{-x} - x^2 e^{-x}$, josta

$$f'(x) = -2e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 2).$$

Koska $e^{-x} > 0$, niin $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$, joista $x = 1 + \sqrt{3}$ ei ole välillä $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Koska välin päätepisteissä $f\left(\pm\sqrt{2}\right) = 0$, niin suurin mahdollinen pituus on

$$f\left(1 - \sqrt{3}\right) = e^{\sqrt{3}-1}\left(2 - \left(1 - \sqrt{3}\right)^2 \right) = 2e^{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3} - 1\right) \approx 3{,}04.$$

Tehtävä 10

Olkoon pallojen säde r. Niiden keskipisteet ovat säännöllisen tetraedrin kärjissä. Tetraedrin särmän pituus on $2r$, joten jokainen tahko on tasasivuinen kolmio, jonka korkeus on $\sqrt{3}\,r$. Tetraedrin korkeusjana leikkaa pohjakolmion mediaanien leikkauspisteessä, jonka etäisyys pohjakolmion kärjestä on $\frac{2}{3}\sqrt{3}r$. Pythagoraan lauseen nojalla tetraedrin korkeus h toteuttaa yhtälön

$$h^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}r\right)^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{8}{3}r^2.$$

Rakennelman korkeus on $h + 2r = \left(\sqrt{\frac{8}{3}} + 2\right)r.$

Tehtävä 11

Puolisuunnikassäännön nojalla

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}f(0) + f(\tfrac{1}{5}) + f(\tfrac{2}{5}) + f(\tfrac{3}{5}) + f(\tfrac{4}{5}) + \tfrac{1}{2}f(1)\right)$$
$$= \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{2}\cdot 1 + 5\sin\tfrac{1}{5} + \tfrac{5}{2}\sin\tfrac{2}{5} + \tfrac{5}{3}\sin\tfrac{3}{5} + \tfrac{5}{4}\sin\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2}\sin 1\right) \approx 0{,}95.$$

Tehtävä 12

a) $R(x) = \dfrac{9x^2-1}{3x^2-5x-2} = \dfrac{9-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}} \to \dfrac{9}{3} = 3$, kun $x \to \infty$.

b) $R(x) = \dfrac{9x^2-1}{3x^2-5x-2} = \dfrac{(3x+1)(3x-1)}{(3x+1)(x-2)} = \dfrac{3x-1}{x-2} \to \frac{6}{7}$, kun $x \to -\frac{1}{3}$.

Tehtävä 13

Vastaoletus: $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \exists m,n \in$ **Z**: $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, joka on supistetussa muodossa.
Tällöin

$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^3 \Rightarrow m^3 = 2n^3.$$

Koska $2n^3$ on parillinen, myös m^3 on parillinen. Tällöin myös m on parillinen, joten $\exists k \in$ **Z**: $m = 2k \Rightarrow m^3 = 8k^3$. Sijoittamalla yllä olevaan yhtälöön saadaan $8k^3 = 2n^3 \Rightarrow n^3 = 4k^3 \Rightarrow n^3$ on parillinen $\Rightarrow n$ on parillinen. Tämä on ristiriita, koska $\frac{m}{n}$ oletettiin supistetuksi, vastaoletus on väärä. Väite on tosi.

Tehtävä 14

a) Leikkauspisteet y-akselilla saadaan asettamalla $x = 0 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 4 = 0$ $\Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1$. Leikkauspisteet x-akselilla saadaan asettamalla $y = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$. Leikkauspisteet ovat $(0,-2)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ ja $(2,0)$.

b) Leikkauspisteet sijaitsevat symmetrisesti suoran $y = -x$ suhteen. Jos leikkauspisteet sijaitsevat ympyrän kehällä, niin symmetrian perusteella keskipiste on tällä suoralla. Keskipiste $(x_0, -x_0)$ on yhtä kaukana pisteistä $(2,0)$ ja $(0,1)$, joten

$$(x_0 - 2)^2 + (-x_0 - 0)^2 = (x_0 - 0)^2 + (-x_0 - 1)^2.$$

Ratkaisuksi saadaan $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Piste $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ on yhtä etäällä kaikista neljästä leikkauspisteestä, joten pisteet ovat ympyrän kehällä. Keskipiste on siis $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ja säteelle r on voimassa $r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$. Ympyrän yhtälö on

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{10}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0.$$

c) Suora on $y = -x$. Sijoittamalla $y = -x$ käyrän yhtälöön saadaan

$$2x^2 + 2x^2 + 3x^2 - 2x - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4\sqrt{2}}{7}.$$

Leikkauspisteet ovat $\left(\dfrac{2 - 4\sqrt{2}}{7}, \dfrac{-2 + 4\sqrt{2}}{7}\right)$ ja $\left(\dfrac{2 + 4\sqrt{2}}{7}, \dfrac{-2 - 4\sqrt{2}}{7}\right)$.

d) Jos käyrä olisi ympyrä, sen yhtälö on sama kuin b-kohdassa. c-kohdassa lasketut käyrän pisteet eivät toteuta ympyrän yhtälöä, joten alkuperäinen käyrä ei ole ympyrä.

Tehtävä 15

a) Esitetty funktioiden $f_0(x) = |\sin x|$, $f_1(x) = \frac{1}{2}|\sin(2x)|$, $f_2(x) = \frac{1}{4}|\sin(4x)|$ kuvaajat välillä $-\pi \le x \le \pi$.

b) Koska $\sin\left(2^k x\right) \ge 0$, kun $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2^k}$, niin jaksollisuuden nojalla

$$\int_0^{\pi} f_k(x)dx = 2^k \int_0^{2^{-k}\pi} f_k(x)dx = \int_0^{2^{-k}\pi} \sin(2^k x)dx = \frac{1}{2^k} \Big/_0^{\pi} - \cos\left(2^k x\right) = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Kysytyt integraalit ovat 2, 1 ja $\dfrac{1}{2}$.

c) $A_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2\left(1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right).$

d) $A_n = 4\left(1-(\frac{1}{2})^{n+1}\right) \to 4,$ kun $n \to \infty$.