YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 24.9.2014
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut ja lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

1. a)	Nimittäjien poisto: $\frac{x+2}{5}=\frac{x-3}{6} \Leftrightarrow 6x+12=5x-15$	1
	$\Leftrightarrow x=-27$	1
b)	Sijoitus antaa $\frac{x+1}{y-1}+\frac{y-1}{x+1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$	1
	$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$	1
c)	Suorien leikkauspisteessä toteutuu yhtälöpari $\begin{cases} x+5y=1 \\ x-5y=5 \end{cases}$ Sekä laskemalla yhtälöt puolittain yhteen että vähentämällä puolittain saadaan $\begin{cases} 2x=6 \\ 10y=-4 \end{cases}$ [tai eliminoitu toinen ja saatu yksi tuntematon]	1
	josta leikkauspisteeksi $\begin{cases} x=3 \\ y=-\frac{2}{5} \end{cases}$	1

2. a)	$2^x=2=2^1 \Leftrightarrow x=1$	1
b)	$2^x=\frac{1}{2}=2^{-1} \Leftrightarrow x=-1$	1
c)	$2^x=8^2=\left(2^3\right)^2=2^6 \Leftrightarrow x=6$	1
d)	$3^x=\frac{1}{3^5}=3^{-5} \Leftrightarrow x=-5$	1
e)	$10^x=1000=10^3 \Leftrightarrow x=3$	1
f)	$10^x=0{,}01=10^{-2} \Leftrightarrow x=-2$	1

3. **a)**	Sulkujen poisto: $(x+1)(2-x)-2=-x^2+x$	1
	$=x(-x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee -x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$ [tai ratkaisukaavalla]	1
b)	Kokeilemalla saadaan kokonaisluvut $n=-1,0,2,3,4$.	2
	Yksi *n*:n arvo puuttuu	–1
c)	Ympyrän säde on *r*. Pinta-ala $A=\pi r^2=520 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{520}{\pi}}$	1
	Halkaisija $2r=2\sqrt{\frac{520}{\pi}}=25,7310... \approx 25,7$ senttimetriä.	1
	Vastauksessa väärä tarkkuus	–1

4.	Aluksi: Tilavuus = 100 ml, yksikköhinta = 1,50 € ja hinta/tilavuus $=\dfrac{1,50}{100}$ €/ml = 0,015 €/ml.	1
	Muuttuneet arvot: Tilavuus = $1,25 \cdot 100$ ml = 125 ml, yksikköhinta $=1,40 \cdot 1,50$ € = 2,10 € ja hinta/tilavuus $\dfrac{2,10}{125}$ €/ml = 0,0168 €/ml.	2
	Vertailu: $\dfrac{0,0168}{0,015}$=1,12,	2
	joten tahna on kallistunut 12 %.	1
	TAI:	
	Aluksi tilavuus on *V*, putkilon hinta on *h* ja hinta/tilavuus on $\frac{h}{V}$.	1
	Muuttuneet arvot: tilavuus $1,25V$, putkilon hinta 1,4*h* ja hinta/tilavuus $\frac{1,4h}{1,25V}$.	2
	Hintavertailu antaa $\frac{1,4h}{1,25V}:\frac{h}{V}=1,12$,	2
	joten tahna on kallistunut 12 %.	1

5.	Käyrä $y=(x-3)^2+(x-9)^2=2x^2-24x+90$ on ylöspäin aukeava paraabeli,	1
	joten pienin arvo = huipun *y*-koordinaatti.	1
	Kysytty muuttujan arvo = huipun *x*-koordinaatti.	1
	$y'(x)=4x-24$.	1
	$y'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-24=0$	1
	$\Leftrightarrow x=6$. [= vakioiden 3 ja 9 keskiarvo]	1

6. a)	Kun liito-orava laskeutuu korkeuden h verran, niin $60 = 3,3h$,	1
	josta $h = \frac{60}{3,3} = 18,1818...$	1
	Liito-oravan on siis ponnistettava korkeudelta $h + 1 = 19,1818... \approx 19$ metriä	1
b)	Jos liitokulma vaakatasoon nähden $= \alpha$, niin $\tan\alpha = \frac{1}{3,3}$	1
	$= 0,3030...$,	1
	jolloin $\alpha = 16,8583...^\circ \approx 17^\circ$ alaviistoon.	1

7.	Jos kuution särmä = s, niin sen tilavuus $V_k = s^3$.	1
	Pyramidin pohjan ala $A = s^2$.	1
	Pyramidin korkeus $h = \frac{1}{2}s$.	1
	Pyramidin tilavuus $V_p = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{2}s$	1
	$= \frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6}V_k$	1
	Kysytty suhde on siten 1:6.	1
	TAI:	
	Kuutio koostuu kuudesta identtisestä pyramidista, joten suhde on 1:6.	6

<table>
<tr>
<td>8.
a)</td>
<td>
<table>
<tr><th>Joukkue</th><th>Katsojamäärä x</th><th>$x - \bar{x}$</th><th>$(x - \bar{x})^2$</th></tr>
<tr><td>Jokerit</td><td>9173</td><td>2618</td><td>6853924</td></tr>
<tr><td>HIFK</td><td>8266</td><td>1711</td><td>2927521</td></tr>
<tr><td>Kärpät</td><td>5821</td><td>-734</td><td>538756</td></tr>
<tr><td>TPS</td><td>5534</td><td>-1021</td><td>1042441</td></tr>
<tr><td>Tappara</td><td>5359</td><td>-1196</td><td>1430416</td></tr>
<tr><td>Ilves</td><td>5177</td><td>-1378</td><td>1898884</td></tr>
<tr><td>yht</td><td>39330</td><td></td><td>14691942</td></tr>
</table>
Laskettu keskiarvo $\bar{x} = \frac{39330}{6} = 6555$ ja täytetty yllä oleva taulukko.
</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr><td></td><td>Keskihajonta $\sigma = \sqrt{\frac{14691942}{6}} = 1564,8185... \approx 1565$.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Kaikilla joukkueilla katsojaluku on yli 4990 = 6555 – 1565.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Vain Jokerien ja HIFK:n katsojaluvut ovat yli 8120 = 6555+1565.</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Kysytyt joukkueet ovat siten Jokerit ja HIFK.</td><td>1</td></tr>
</table>

9. **a)**	Raimon $I = \frac{102}{1{,}93^2} = 27{,}3832... \approx 27{,}4$.	1
	Raimon $J = \frac{1{,}3\cdot 102}{1{,}93^{2{,}5}} = 25{,}6241... \approx 25{,}6$.	1
b)	Hannan massa on $m = I\,h^2 = 25\cdot 1{,}60^2 = 64$ kilogrammaa	1
	Hänen *J*-indeksinsä on siis $J = \frac{1{,}3\cdot 64}{1{,}60^{2{,}5}} = 25{,}6935... \approx 25{,}7$.	1
c)	Indeksit ovat samat silloin, kun $\frac{m}{h^2} = \frac{1{,}3m}{h^{2{,}5}}$. Tällöin $\frac{1{,}3}{\sqrt{h}} = 1$, joten	1
	$h = 1{,}3^2 = 1{,}69$ metriä.	1

10.	Vasemmanpuoleisen neliön sivun pituus $s_v = \frac{5}{2} = 2{,}5$.	1
	Jos oikeanpuoleisen neliön sivu $s_o = x$, niin hypotenuusa = 3*x*. (muistikolmiot).	1
	Saadaan ehto $5\sqrt{2} = 3x$	1
	$\Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{3}$	1
	$= 2{,}3570... < 2{,}5$, joten $s_v > s_o$.	1
	Tällöin myös vasemmanpuoleisen neliön pinta-alakin on suurempi.	1

11.	Ison munkin säde on *R*, jolloin sen tilavuus $V_i = \frac{4}{3}\pi R^3$ ja pinta-ala $A_i = 4\pi R^2$.	1
	Pienen munkin säde on *r*, jolloin $V_p = \frac{4}{3}\pi r^3$ ja $A_p = 4\pi r^2$.	1
	Saadaan tilavuusehto $3V_i = 24V_p \Leftrightarrow V_i = 8V_p$,	1
	eli $\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$	1
	$\Leftrightarrow R^3 = 8r^3 \Leftrightarrow R = 2r$.	1
	Kokonaispinta-alojen eli sokerimäärien suhde on ”pienet : isot” = $\frac{24A_p}{3A_i} = \frac{8\cdot 4\pi r^2}{4\pi(2r)^2} = 2$.	1

12.	Malli: Päästöjen määrä $P(t)=a\cdot b^{t}$. Tutkitaan tilannetta vuodesta 1990 alkaen, jolloin mallin *t* on vuosien määrä vuoden 1990 jälkeen. Päästöt vuonna 1990 ovat $P(0)=a$.	1
	Vuotuinen kasvutekijä $b=1+\frac{p}{100}$, jossa *p* = vuotuinen kasvuprosentti. Päästöjen kasvu 1990 – 2008 oli 39 %. Saadaan yhtälö: $P(18)=1{,}39P(0)$,	1
	eli $a\cdot b^{18}=1{,}39a$,	1
	josta kasvutekijä $b=\sqrt[18]{1{,}39}=1{,}0184...$	1
	Vuonna 2015 on $t=25$, joten $P(25)=a\cdot b^{25}=a\cdot 1{,}5799...\approx 1{,}58a$.	1
	Päästöt ovat siis kasvaneet yhteensä n. 58 %.	1

13. **a)**	Yksi kärki on origossa. Muut kärjet saadaan yhtälöpareista: $\begin{cases}x=0\\x+3y=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=6\end{cases}$ $\begin{cases}y=0\\3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{19}{3}\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+3y=18\\3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-9y=-54\\3x+2y=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$	2
	Kuvio	1
	Yksi kärki väärin	–1
b)	Funktion $f(x,y)=2x+y$ ääriarvot löytyvät nelikulmion kärjistä.	1
	Ehdokkaat: $f(0,0)=0$, $f(0,6)=6$, $f(3,5)=11$, $f\left(\frac{19}{3},0\right)=\frac{38}{3}$,	1
	joista $\frac{38}{3}$ on suurin ja 0 pienin.	1

14. a)	Sovelletaan annuiteettikaavaa $A = Kq^n \dfrac{1-q}{1-q^n}$, jossa $K = 8000$ €, $p = \frac{6,6}{12} = 0,55$, $q = 1 + \frac{p}{100} = 1,0055$ ja $n = 24$.	1
	Sijoitukset: $A = 8000 \cdot q^{24} \cdot \dfrac{1-q}{1-q^{24}} = 356,7316...$, joten kuukausierä on 356,73 €.	1
b)	Sijoitetaan edellä lasketut q ja A sekä $k = 12$ jäljellä olevan lainan kaavaan $V_k = Kq^k - A\dfrac{1-q^k}{1-q}$.	1
	Saadaan $V_{12} = 8000q^{12} - A\dfrac{1-q^{12}}{1-q} = 4131,5908...$, joten lainaa on jäljellä 4131,59 €.	1
c)	Kristianin maksama korko = $24A - 8000$	1
	$= 24 \cdot 356,73 - 8000 = 561,52$ euroa.	1

15. a)	Olkoon $A = (20,10,5)$. $\lvert\bar{v}\rvert = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$	1
	Ehto etäisyydelle on $t\lvert\bar{v}\rvert = 7t = 105$, josta $t = 15$.	1
	Räjähdyspisteen paikka on P. Saadaan yhtälö $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 15\bar{v} = 20\bar{i} + 10\bar{j} + 5\bar{k} + 30\bar{i} - 45\bar{j} + 90\bar{k} = 50\bar{i} - 35\bar{j} + 95\bar{k}$, joten räjähdyspiste on $(50,-35,95)$.	1
b)	Etäisyys katsojiin on $\sqrt{50^2 + (-35)^2 + 95^2}$	1
	$= \sqrt{12750}$	1
	$= 112,9158... \approx 113$ metriä.	1