YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

24.9.2014

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (∗) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $(x-2)(x-3)=6$.

b) Missä pisteessä paraabelit $y=x^2+x+1$ ja $y=x^2+2x+3$ leikkaavat?

c) Määritä kaikki luvut, jotka toteuttavat seuraavan ehdon: Luvun ja sen käänteisluvun keskiarvo on 4.

2. **a)** Määritä suorien $2x+3y=7$ ja $3x-2y=4$ leikkauspiste.

b) Luku on yhtä suuri kuin puolet sen neliöjuuresta. Määritä kaikki tällaiset luvut.

c) Sievennä lauseke $\ln\left(\frac{1}{3x^2}\right)+\ln 3+2\ln x$, kun $x>0$.

3. **a)** Pekka aloittaa kuumeen mittaamisen ajanhetkellä $t=0$. Pekan käyttämän mittarin lukema $f(t)$ hetkellä t minuuttia saadaan kaavasta $f(t)=38-2e^{-0{,}6t}$ celsiusastetta. Kuinka kauan mittausta pitää jatkaa, jotta tulos poikkeaa enintään asteen kymmenesosan arvosta 38,0 celsiusastetta? Anna vastaus minuutin tarkkuudella.

b) Määritä lämpötilan muutosnopeus $f'(3)$. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

4. Paraabelin $y=x^2$ jokaista pistettä siirretään vektorin $\overline{v}$ verran. Määritä näin syntyvän käyrän yhtälö muodossa $y=f(x)$, kun

a) $\overline{v}=2\overline{j}$

b) $\overline{v}=3\overline{i}$

c) $\overline{v}=3\overline{i}+2\overline{j}$.

5. Käyrä $y=\sin x$, $-\pi\le x\le\pi$, pyörähtää x-akselin ympäri. Laske näin syntyvän tiimalasia muistuttavan kappaleen tilavuuden tarkka arvo.

6. Tarkastellaan paraabelin kaarta $y=3x-5x^2$, kun $0\le x\le\frac{1}{2}$. Mikä kaaren piste on kauimpana origosta? Perustele vastauksesi myös muulla tavalla kuin laskimella, esim. derivaatan avulla.

7. Pakkausautomaatti täyttää kahvipaketteja. Kahvin määrä on normaalijakautunut, keskihajonta on 10 grammaa, mutta odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää odotusarvoksi, kun tavoitteena on valmistaa paketteja, joista enintään $2{,}0$ % sisältää alle 500 grammaa kahvia? Anna vastaus gramman tarkkuudella.

8. Tarkastellaan lukujonoja (a_n) ja (b_n), joiden kaikki termit a_n ja b_n, $n=1,2,\dots$, ovat positiivisia.

a) Oletetaan, että jono (a_n) on geometrinen. Osoita, että $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$ kaikilla $n=2,3,\dots$

b) Oletetaan, että $b_n=\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ kaikilla $n=2,3,\dots$ Osoita, että jono (b_n) on geometrinen.

9. Oheisessa kuvassa on rakenteilla arkkitehti Eero Saarisen suunnittelema Gateway Arch Saint Louisissa USA:ssa. Se rakennettiin vuosina 1963–1965. Kaaren muotoa kuvaa yhtälö

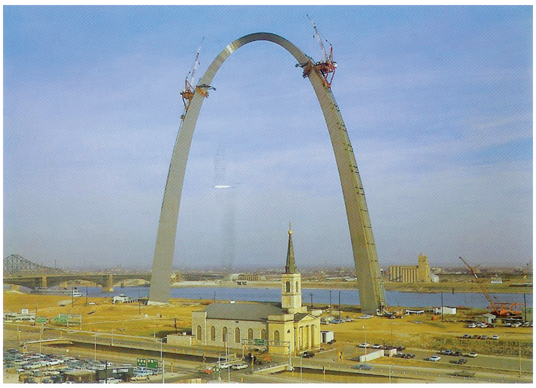
$$y=-39f\left(\tfrac{x}{39}\right)+231.$$

Tässä $f(t)=\frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right)$, x-akseli kulkee maan pinnalla kaaren tyvien kautta ja y-akseli on kaaren symmetria-akseli. Mittayksikkönä on metri.

a) Määritä kaaren korkeus metrin tarkkuudella.

b) Määritä kaaren leveys metrin tarkkuudella.

c) Kuinka suuressa terävässä kulmassa kaari kohtaa maanpinnan? Anna vastaus asteen tarkkuudella.

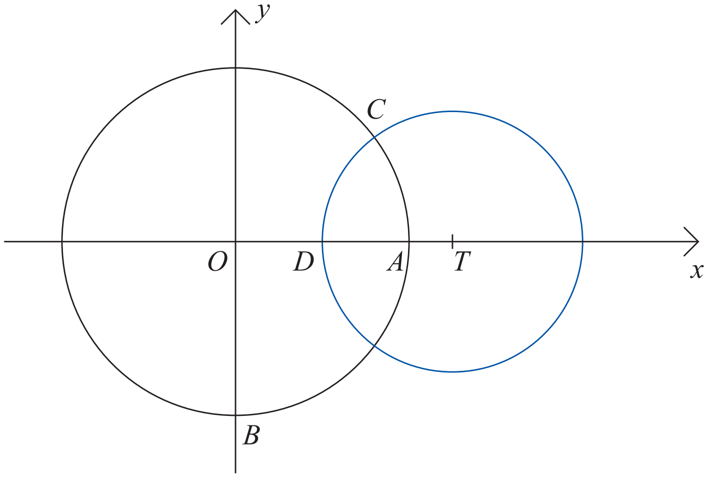


<http://rememberingletters.wordpress.com/2012/01/12/gateway-arch/>. Luettu 12.2.2013.

10. Olkoon $A=(1,0)$, $B=(0,-1)$ ja $t>1$. Piste $T=(t,0)$ keskipisteenä piirretään ympyrä, joka leikkaa yksikköympyrän $x^2+y^2=1$ kohtisuorasti kuvion mukaisessa pisteessä C sekä janan OA pisteessä D.

a) Määritä pisteen C koordinaatit parametrin t avulla lausuttuna.

b) Osoita, että pisteet B, D ja C ovat samalla suoralla.



11. **a)** Osoita, että funktio $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ on aidosti kasvava, kun $x\in$ **R**.

b) Määritä funktion $f(x)$ raja-arvo, kun x kasvaa rajatta.

c) Päteekö kaikilla $x\geq 10$ epäyhtälö $f(x)\geq 0{,}999$?

12. Olkoon **R** reaalilukujen joukko ja **N** $=\{0,1,2,\dots\}$ luonnollisten lukujen joukko. Onko seuraava väite tosi vai epätosi? Perustele vastauksesi.

a) $\forall x\in \mathbf{R}\ \exists y\in \mathbf{R}\ :\ x\leq y$

b) $\exists y\in \mathbf{R}\ \forall x\in \mathbf{R}\ :\ x\leq y$

c) $\exists x\in \mathbf{N}\ \forall y\in \mathbf{N}\ :\ x\leq y$

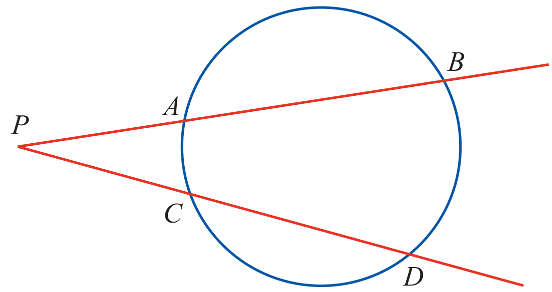
13. Tarkastellaan yhtälöä $x^5-x=1$.

a) Osoita, että yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu välillä $1\leq x\leq 2$.

b) Määritä a-kohdan ratkaisulle Newtonin menetelmän mukainen likiarvo x_4 käyttämällä alkuarvoa $x_0=1$. Anna vastaus kolmen desimaalin tarkkuudella.

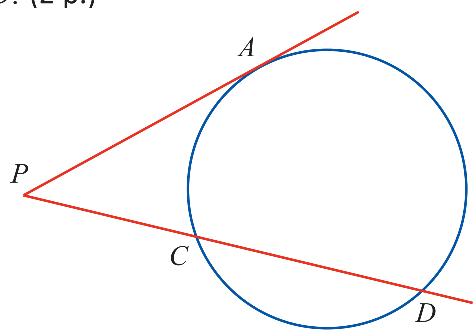
***14.** Tarkastellaan ympyrää ja sen ulkopuolella olevaa pistettä P.

a) Pisteestä P piirretään kaksi suoraa, jotka leikkaavat ympyrän neljässä eri pisteessä A, B, C ja D kuvion mukaisesti. Osoita, että kolmiot PCB ja PAD ovat yhdenmuotoiset. (2 p.)

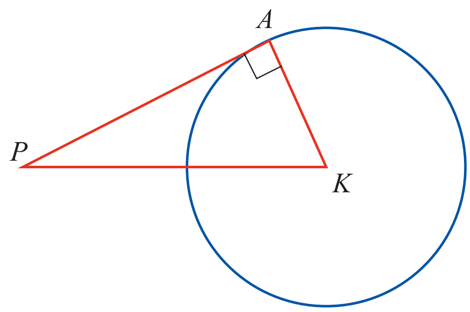


b) Osoita, että $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. (2 p.)

c) Erikoistapauksessa $A = B$ toinen suorista sivuaa ympyrää. Osoita, että tällöin pätee $(PA)^2 = PC \cdot PD$. (2 p.)



d) Todista edellisten kohtien avulla Pythagoraan lause tutkimalla alla olevan kuvion kolmiota, jonka kärki K on ympyrän keskipisteessä ja kärki A on ympyrän kehällä. (3 p.)



***15. a)** Osoita, että $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ kaikille reaaliluvuille x ja y. (2 p.)

b) Olkoot $a_1, \ldots, a_n$ ja $b_1, \ldots, b_n$ reaalilukuja. Oletetaan, että $A = \sqrt{a_1^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2}} > 0$, $B = \sqrt{b_1^{\,2} + \cdots + b_n^{\,2}} > 0$, ja merkitään lisäksi $x_k = \frac{a_k}{A}$ ja $y_k = \frac{b_k}{B}$, kun $k = 1, \ldots, n$. Osoita a-kohdan avulla, että $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq 1$. (4 p.)

c) Johda b-kohdan avulla *Cauchyn epäyhtälö*

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2} + \cdots + b_n^{\,2}}.$$ (3 p.)