MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 28.9.2016
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

1 sijoitettu funktion f lausekkeeseen	1
$1^3 = 1$, $1^2 = 1$	1
$1 - 2 + 1 + 7 = 7$	1
Vähintään kaksi termiä oikein derivoitu	1
$3x^2 - 4x + 1$	1
$= 12 - 8 + 1 = 5$	1

2.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ TAI lavennus 2^3:lla	1
$\frac{7}{8}$	1
Vastaus $x = -\frac{4}{3}$	1
Perustelu $2x + 4 = -x$	1
Vastaus $x = 5$	1
Perustelu $2^{2(x+1)} = 2^{3(x-1)}$	1

3. (1 piste/kohta)

	Kaava		Väite	Kaava nro
1	$b = 2a$	A	Luku b on 50 % suurempi kuin luku a.	3
2	$b = 0{,}5a$	B	Luku a on neljäsosa luvusta b.	5
3	$b = 1{,}5a$	C	Luku b on puolet luvusta a.	2
4	$b = \frac{1}{4}a$	D	Luku b on 25 % suurempi kuin luku a.	6
5	$b = 4a$	E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.	1
6	$b = \frac{5}{4}a$	F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.	4

4.

Toisen asteen yhtälö, jossa $a = 1$, $b = -\frac{5}{2}$ ja $c = 1$	1
juuret ovat $\frac{1}{2}(\frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4})$	1
eli $\frac{1}{2}$ ja 2	1
Pitää selvittää, missä f saa a-kohdassa löydetyt juuret	1
joko $f(x) = \frac{1}{2}$ eli kuvaajasta $x = -1$	1
tai $f(x) = 2$ eli kuvaajasta $x = 2$	1
Jos a-kohdassa väärät juuret, b-kohdasta	max 3 p.

B1-osa

5.	Uusi pituus ja leveys on $1 - 0,05 = 0,95$ kertaa alkuperäinen	1
	Uusi leveys $1,9$ ja pituus $3,8$	1
	Uusi pinta-ala $1,9 \cdot 3,8 = 7,22$	1
	Alkuperäinen pinta-ala $2 \cdot 4 = 8$	1
	Suhde on siis $\frac{7.22}{8}$	1
	$= 0,9025$, eli pienennystä vajaat 10 %.	1

6.	Sylinterinmuotoinen osa: korkeus $h = 97 - 32 = 65$ ja säde $r = \frac{65-4}{2} = 30,5$	1
	joten tilavuus $\pi r^2 h \approx 189960$	1
	Katkaistu kartio: korkeus $h = 32 - 2$, säteet $r_1 = 30,5$ ja $r_2 = \frac{45}{2} = 22,5$,	1
	joten pohjien alat ovat $A_1 = \pi r_1^2 \approx 2922$ ja $A_2 = \pi r_2^2 \approx 1590$	1
	sen tilavuus on siis $\frac{1}{3}h(A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + A_2) \approx 66700$.	1
	Sisäosan tilavuus on siten noin $190 + 66,7 = 260$ (litraa).	1

7.	Pätevä esimerkki: heitetään sinistä ja punaista noppaa. Todennäköisyys saada sinisellä nopalla ykkönen on riippumaton siitä, saiko punaisella ykkösen.	3
	Pätevä esimerkki: säkissä on viisi sinistä palloa ja viisi punaista palloa. Nostetaan siitä yksi pallo ja sitten toinen. Todennäköisyys, että toinen pallo on sininen, ei ole riippumaton ensimmäisen pallon väristä.	3

8.	Kun pallo ensimmäisen kerran osuu lattiaan, se on kulkenut metrin.	1
	Ensimmäisellä pompulla se nousee $0,8$ metriin ja palaa lattiatasolle, yhteensä $1,6$ metriä.	1
	Toisella pompun korkeus on $(0,8)^2$ ja matka $2(0,8)^2$.	1
	Pomppu n on siten pituudeltaan $2(0,8)^n$.	1
	Kokonaismatkan antaa geometrinen sarja $1 + 2\sum_{n=1}^{9}(0,8)^n$	1
	$= 1 + 2 \cdot 0,8\frac{1-(0,8)^9}{1-0,8} \approx 7,9$ (metriä).	1

9.	$\lvert AC\rvert = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$	1
	$\lvert AB\rvert = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$	1
	joten $\frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert} = \sqrt{2}$	1
	D jakaa sivun BC viereisten sivujen suhteessa, eli $\frac{\lvert CD\rvert}{\lvert DB\rvert} = \frac{\lvert AC\rvert}{\lvert AB\rvert} = \sqrt{2}$	1
	koska $\lvert CD\rvert = \sqrt{2}\lvert DB\rvert$ ja $\lvert BC\rvert = \lvert CD\rvert + \lvert DB\rvert$ saamme $\lvert DB\rvert = \frac{1}{1+\sqrt{2}}\lvert BC\rvert = \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	1
	BC-suuntainen yksikkövektori on $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$, joten $D = B + \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}u = (2,1) + \frac{1}{1+\sqrt{2}}(-1,2)$	1

B2-osa

10.

Todennäköisyys, että Saksa voittaa ensimmäisen pelinsä on $0,65$, ja todennäköisyys, että Suomi voittaa on $0,5$.	1
Tapahtumat ovat riippumattomia, joten todennäköisyys, että kumpikin tapahtuu, saadaan todennäköisyyksien tulolla $0,65 \cdot 0,5 = 0,325$.	1
Mahdollisia välieräpareja on kolme sen mukaan, onko Suomen vastustaja Saksa, Senegal vai Singapore.	1
Mikäli vastustaja on Saksa, on todennäköisyys voittaa turnaus 0.	1
Mikäli vastustaja on Singapore, on todennäköisyys päästä finaaliin $0,5$ ja vastustaja Saksa (tn $0,65$) tai Senegal (tn $0,35$). Todennäköisyys voittaa turnaus on siten $0,5 \cdot (0,65 \cdot 0 + 0,35 \cdot 0,4) = 0,07$.	1
Mikäli vastustaja on Senegal, on todennäköisyys päästä finaaliin $0,4$ ja vastustaja Saksa (tn $0,55$) tai Singapore (tn $0,45$). Todennäköisyys voittaa turnaus on siten $0,4 \cdot (0,55 \cdot 0 + 0,45 \cdot 0,5) = 0,09$, mikä on suurin todennäköisyys voittaa.	1

11.

Tehty oletus tulojakaumasta.	1
Oletus ei ole ristiriidassa lehtileikkeen kanssa.	1
Oletus on "normaalityyppinen" eli painottuu keskituloisiin.	1
Oletus voi olla esimerkiksi: 15 t€: 0,2; 30: 0,45; 60: 0,25; 90: 0,09; 120: 0,01.	
Eri luokkien keskimääräinen veroprosentti arvioitu taulukosta	1
Esimerkiksi: 15: 0 %; 30: 6 %; 60: 13 %; 90: 17 %; 120: 21 %	
Kokonaistulo: $15 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,45 + 60 \cdot 0,25 + 90 \cdot 0,09 + 120 \cdot 0,01 = 40,8$ (t€).	
Kokonaisvero: $15 \cdot 0,2 \cdot 0 + 30 \cdot 0,45 \cdot 0,06 + 60 \cdot 0,25 \cdot 0,13 + 90 \cdot 0,09 \cdot 0,17 + 120 \cdot 0,01 \cdot 0,21 = 4,389$ (t€).	1
Keskimääräinen veroprosentti on siten $\frac{4,389}{40,8} \approx 10,7$ %, mikä olisi myös vaadittava tasaveroprosentti.	1

12.

$f'(x) = 3x^2 + 4x$	1
derivaatta on ylöspäin aukeava paraabeli,	1
joten se ei ole kasvava kaikkialla.	1
$h(x) = g'(x) = 4x^3 + 2ax$	1
h on kasvava, jos sen derivaatta on ei-negatiivinen, $h'(x) = 12x^2 + 2a \geqslant 0$.	1
Tämä toteutuu, jos ja vain jos $a \geqslant 0$.	1

13.

Pesämuna vuoden korolla tuottaa $700 \cdot (1 + 0,006 \cdot 0,7)$.	1
Kuukausikorko on $q = \frac{0,6}{12 \cdot 100} \cdot 0,7 = 0{,}00035$.	1
Jos x on kuukaudessa talletettu summa, niin helmikuun talletuksen tuotto on $11qx$, maaliskuun tuotto on $10qx$, jne.	1
Vuoden aikana tehtyjen talletusten tuotto on siten $11qx + 10qx + \cdots + qx = 66qx = 0,0231x$.	1
Kun tuoton lisäksi huomioidaan sijoitettu pääoma ($11x$), saadaan yhtälö $11,0231x + 700 \cdot 1,0042 = 1800$	1
jonka ratkaisu $x \approx 99,52$ kertoo kuukausitalletuksen suuruuden.	1