YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2016

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

A-osa

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

Lukion numero ______ Lukion nimi ______

Kokelaan sukunimi ja kaikki etunimet selvästi kirjoitettuna ______

Kokelaan numero ______ Kokelaan nimikirjoitus ______

1. Mitkä väitteet A–F ja kaavat 1–6 liittyvät toisiinsa? Merkitse vastauksesi alimpaan taulukkoon.

	Väite
A	Luku b on 50 % suurempi kuin luku a.
B	Luku a on neljäsosa luvusta b.
C	Luku b on puolet luvusta a.
D	Luku b on 25 % suurempi kuin luku a.
E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.
F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.

	Kaava
1	$b = 2a$
2	$b = 0{,}5a$
3	$b = 1{,}5a$
4	$b = \frac{1}{4}a$
5	$b = 4a$
6	$b = \frac{5}{4}a$

Väite	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero						

2. **a)** Sievennä lauseke $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2}}}$, kun $a \geq 0$.

b) Laske funktion

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} + 1$$

derivaatan arvo kohdassa $x = 2$.

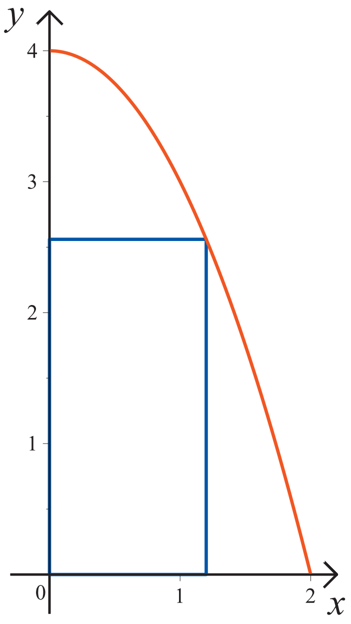
c) Laske ja sievennä $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$.

3. Digitaalisten sovellusten ansiosta binäärilogaritmin $\operatorname{lb} x = \log_2 x$ käyttö on yleistynyt.

a) Ratkaise yhtälö $\operatorname{lb}(x+1) - \operatorname{lb}(4x) = 1$.

b) Millä arvoilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ on voimassa $2 \leq \operatorname{lb} n \leq 3$?

4. Suorakulmion yksi kärki on origossa, ja siitä lähtevät kaksi sivua sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Neljäs kärki sijaitsee paraabelilla $y = 4 - x^2$ alueessa $x \geq 0$, $y \geq 0$. Määritä suorakulmion suurimman mahdollisen pinta-alan tarkka arvo.



YLIOPPILASTUTKINTO-
LAUTAKUNTA

28.9.2016

MATEMATIIKAN KOE
PITKÄ OPPIMÄÄRÄ

B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Tehtävän 5 ratkaisu kirjoitetaan kokoarkille. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Jos et tee tehtävää 5, muut ratkaisut kootaan vain nimitiedot sisältävän kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9. Jos valitset tehtävän 9, ratkaise joko tehtävä 9.1 tai 9.2.

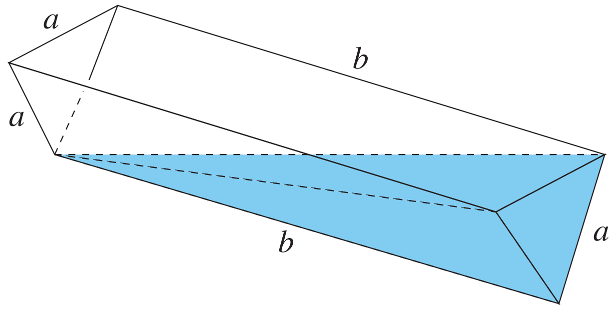
5. **a)** Kolmion kulmat muodostavat aritmeettisen jonon, ja yhden kulman suuruus on $103°$. Määritä kulmien suuruudet asteina.

b) Kolmion kulmat muodostavat geometrisen jonon, ja yhden kulman suuruus on $\frac{\pi}{7}$ radiaania. Määritä kulmien suuruudet radiaaneina.

6. Vesikaukalon päädyt ovat tasasivuisen kolmion muotoiset, ja kolmion sivujen pituus on a. Kaukalon pohja koostuu kahdesta suorakulmion muotoisesta levystä, joiden pituus on b.

a) Vaakasuorassa oleva kaukalo on aluksi täynnä vettä. Sitä kallistetaan pituussuunnassa niin, että vedenpinta ulottuu vasemmanpuoleisen päätykolmion alakulmaan alla olevan kuvion mukaisesti. Kuinka monta prosenttia vedestä valuu pois kallistuksen aikana?

b) Tämän jälkeen kaukalo palautetaan takaisin vaakasuoraan asentoon. Kuinka korkealla vedenpinta on kaukalon syvimmästä kohdasta mitattuna?



7. Tasokäyrä K muodostuu niistä pisteistä (x, y), joiden etäisyys origosta on yhtä suuri kuin etäisyys suorasta $y = 2$.

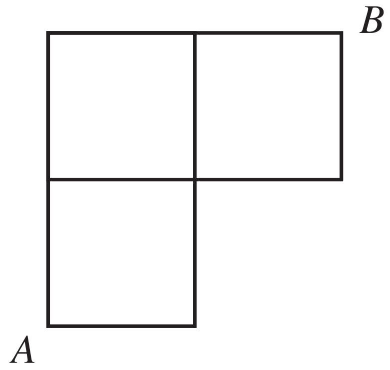
a) Johda käyrän K yhtälölle muoto $y = f(x)$. (4 p.)

b) Laske käyrän K ja x-akselin väliin jäävän rajoitetun tasoalueen pinta-ala. (2 p.)

8. Alla oleva kaavio esittää pienen kaupungin katuverkkoa. Anssi kulkee pisteestä A pisteeseen B käyttämällä mahdollisimman lyhyttä reittiä, jolloin matkan pituus on neljä korttelinväliä. Sellaisissa risteyksissä, joissa kaksi vaihtoehtoa johtaa lyhimpään reittiin, hän valitsee suunnan kolikkoa heittämällä.

a) Piirrä erilliset kuviot kaikista niistä viidestä mahdollisesta reitistä, joiden pituus on neljä korttelinväliä, ja määritä niiden valintatodennäköisyydet.

b) Birgitta kulkee pisteestä B pisteeseen A ja valitsee mahdollisimman lyhyen reitin vastaavalla tavalla. Anssi ja Birgitta lähtevät liikkeelle samanaikaisesti ja kulkevat samaa vauhtia. Kuinka suurella todennäköisyydellä he kohtaavat toisensa matkan puolivälissä?



9. Valitse joko tehtävä 9.1 tai 9.2.

9.1 Olkoon $n = 2, 3, 4, \ldots$ kokonaisluku. Osoita, että luku

$$n^3 + 6n^2 - 7n$$

on jaollinen luvulla 6.

9.2 Tarkastellaan raja-arvoa

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^n - 60x - 8}{x^2 - 4}$$

eksponentin $n = 1, 2, 3, \ldots$ eri arvoilla.

a) Osoita, että raja-arvo on olemassa, kun $n = 7$.

b) Osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa, kun $n \neq 7$.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Yhtälö $x = g(x)$ voidaan usein ratkaista *kiintopistemenetelmän* avulla. Tällöin tehdään alkuarvaus x_0 ja määritellään lukujono (x_n) käyttämällä palautuskaavaa

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{kun} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Anna seuraavien kohtien vastauksina lukujen x_{10} likiarvot kolmen desimaalin tarkkuudella.

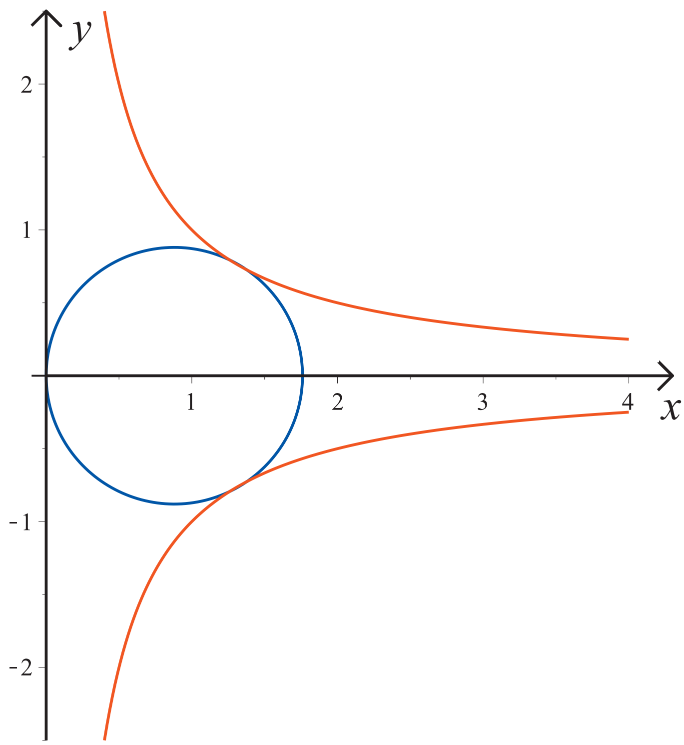
a) Ratkaise yhtälö

$$x = 2 + \ln x \qquad (*)$$

kiintopistemenetelmän avulla, kun alkuarvauksena on $x_0 = 1$.

b) Yhtälöllä $(*)$ on toinenkin ratkaisu. Muokkaa yhtälö $(*)$ eksponenttifunktion avulla toisenlaiseen kiintopistemenetelmässä käytettävään muotoon ja ratkaise se alkuarvauksella $x_0 = 1$.

11. Ympyrä sivuaa y-akselia origossa sekä käyriä $y = \dfrac{1}{x}$ ja $y = -\dfrac{1}{x}$ alueessa $x > 0$. Määritä ympyrän säde.



12. Tehtävässä tutkitaan tason yhtälön erilaisia esitysmuotoja.

a) Tarkastellaan yhtälöä

$$\overline{N} \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0, \tag{$*$}$$

kun

$$\begin{aligned} \overline{N} &= 3\,\overline{i} - 2\,\overline{j} + 5\,\overline{k}, \\ \overline{r} &= x\,\overline{i} + y\,\overline{j} + z\,\overline{k} \quad \text{ja} \\ \overline{r}_0 &= \overline{i} + 2\,\overline{j} + 3\,\overline{k}. \end{aligned}$$

Muunna yhtälö $(*)$ muotoon

$$ax + by + cz = d \tag{$**$}$$

määrittämällä siinä esiintyvät vakiot a, b, c ja d.

b) Osoita, että piste $(1, 2, 3)$ toteuttaa yhtälön $(**)$ näillä vakioiden arvoilla.

c) Määritä uudet vektorit $\overline{N}$ ja $\overline{r}_0$, joilla yhtälö $2x - 5y + 7z = 14$ on yhtäpitävä muotoa $(*)$ olevan yhtälön kanssa.

13. Reaaliluku on *algebrallinen*, jos se on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohta. Tällaiset polynomit ovat muotoa

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

kun polynomin asteluku on $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja kertoimet $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ovat kokonaislukuja. Osoita, että luku x on algebrallinen johtamalla jonkin sopivan polynomin lauseke, kun

a) $x = \dfrac{2}{3}$ (1 p.)

b) $x = \sqrt{3}$ (1 p.)

c) $x = 2 + \sqrt{3}$ (1 p.)

d) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. (3 p.)