MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 28.9.2016
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

A-osa

1. (1 piste/kohta)

	Kaava		Väite	Kaava nro
1	$b=2a$	A	Luku *b* on 50 % suurempi kuin luku *a*.	3
2	$b=0{,}5a$	B	Luku *a* on neljäsosa luvusta *b*.	5
3	$b=1{,}5a$	C	Luku *b* on puolet luvusta *a*.	2
4	$b=\frac{1}{4}a$	D	Luku *b* on 25 % suurempi kuin luku *a*.	6
5	$b=4a$	E	Luku *b* on kaksinkertainen lukuun *a* verrattuna.	1
6	$b=\frac{5}{4}a$	F	Luku *a* on nelinkertainen lukuun *b* verrattuna.	4

2. a)	$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2}}}=\sqrt{a\sqrt{a\cdot a}}=\sqrt{a\sqrt{a^2}}=$	1
	$\sqrt{a^2}=a$	1
b)	$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}$,	1
	joten $f'(2)=\frac{1}{2}-\frac{2}{4}=0$.	1
c)	Löydetty integraalifunktiot –cos(x) ja sin(x).	1
	Saatu vastaus 2.	1

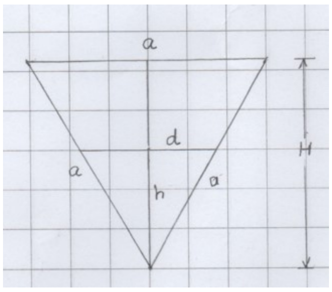
3. a)	$\mathrm{lb}(x+1)-\mathrm{lb}(4x)=\mathrm{lb}\dfrac{x+1}{4x}=1$,	1
	josta $\dfrac{x+1}{4x}=2^1=2\Leftrightarrow$	1
	$x+1=8x\Leftrightarrow 7x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$	1
b)	Koska lb 4 = 2 ja lb 8 = 3 (ja funktio lb *x* on aidosti kasvava),	2
	niin kelvollisia ovat arvot $n=4,5,6,7,8$.	1

4.	Neljäs kärki on $(x, 4-x^2)$. Tällöin suorakulmion sivut ovat x ja $4-x^2$.	1
	Pinta-ala $A(x) = x(4-x^2) = 4x - x^3$, $0 \le x \le 2$.	1
	Derivaatta $A'(x) = 4 - 3x^2$,	1
	jonka nollakohdat ovat $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Näistä vain positiivinen arvo kelpaa.	1
	Koska $A(x)$ on suljetulla välillä $[0,2]$ määritelty jatkuva funktio ja $A(0) = A(2) = 0$,	1
	niin suurin $A = A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{9}\sqrt{3}$.	1

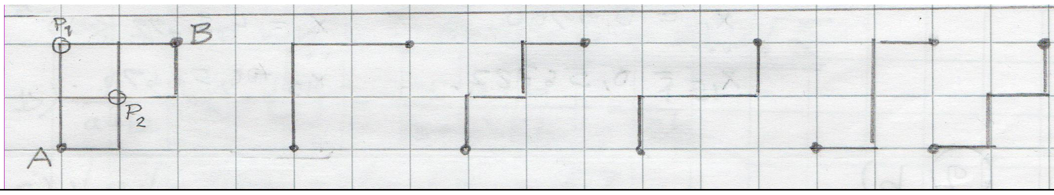
B1-osa

5. a)	Merkitään kulmia $a, a+d$ ja $a+2d$. Kulmien summa on $3a + 3d = 180^\circ$, josta $a + d = 60^\circ$.	1
	Suurin kulma on $a + 2d = 103^\circ$. Saadaan yhtälöpari $\begin{cases} a+2d = 103^\circ \\ a+d = 60^\circ \end{cases}$,	1
	josta $\begin{cases} a = 17^\circ \\ d = 43^\circ \end{cases}$. Kulmien suuruudet ovat siten $17^\circ, 60^\circ$ ja 103°.	1
	TAI:	
	Merkitään kulmia $a-d, a$ ja $a+d$.	1
	Kulmien summa on $3a = 180^\circ$, josta $a = 60^\circ$.	1
	Suurin kulmista on $a + d = 103^\circ$, joten $d = 43^\circ$. Kulmien suuruudet ovat siten $17^\circ, 60^\circ$ ja 103°.	1
b)	Merkitään kulmia x, qx ja q^2x, joista pienin on $x = \frac{\pi}{7}$.	1
	Kulmien summa on $\frac{\pi}{7}(1 + q + q^2) = \pi$, josta saadaan ehto $q^2 + q - 6 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = -3$ (ei kelpaa).	1
	Kulmien suuruudet ovat siten $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ ja $\frac{4\pi}{7}$. Myös ratkaisu, jossa keskimmäinen termi on $\frac{\pi}{7}$ kelpaa.	1

6. a)	Kaukalo on suora särmiö. Jos päätykolmion pinta-ala on A, niin kaukalon tilavuus $V_k = Ab$.	1
	Jäljelle jäänyt vesi muodostaa kolmisivuisen pyramidin, jonka tilavuus $V_v = \frac{1}{3}Ab$. Poistuneen veden tilavuus on siten $V = \frac{2}{3}Ab = \frac{2}{3}V_k$.	1
	Vettä on valunut pois $\frac{2}{3}$ koko määrästä, eli $\frac{200}{3}\,\% = 66\frac{2}{3}\,\% \approx 67\,\%$.	1
b)	Päätykolmion korkeus $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ja pinta-ala $A_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.	1
	Jäljelle jäänyt vesi muodostaa päätyyn tasasivuisen kolmion, joka on yhdenmuotoinen päätykolmion kanssa. Koska vesimäärien suhde = päätykolmioiden pinta-alojen suhde, niin $\dfrac{d^2}{a^2} = \dfrac{1}{3}$, josta $d = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. (Kuvio alla)	1
	Veden korkeus on siten $\dfrac{d\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 2} = \dfrac{a}{2}$.	1



7. a)	Etäisyysehto antaa yhtälön $\sqrt{x^2 + y^2} = \lvert 2 - y \rvert$,	1
	josta neliöimällä puolittain saadaan $x^2 + y^2 = 4 - 4y + y^2$,	1
	joten käyrä K on paraabeli $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$.	1
b)	Käyrä leikkaa x-akselin, kun $y = 0$. Tällöin $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0$, josta $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.	1
	Koska alue jää x-akselin yläpuolelle ja on symmetrinen y-akselin suhteen, on kysytty pinta-ala $2\int_0^2 (-\frac{1}{4}x^2 + 1)dx =$	1
	$2\Big/_0^2 \left(-\frac{1}{12}x^3 + x\right) = 2\left(-\frac{2}{3} + 2\right) = \frac{8}{3}$.	1

8. **a)**	Eri reitit: 	1
	Reittien todennäköisyydet vasemmalta: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$	2
b)	Mahdolliset kohtauspaikat ovat pisteet P_1 ja P_2.	1
	Tn kohdata pisteessä P_1 on $p_1=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$. Tn kohdata pisteessä P_2 on $p_2=(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1)(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1)$.	1
	Kysytty todennäköisyys on $p_1+p_2=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8}$.	1

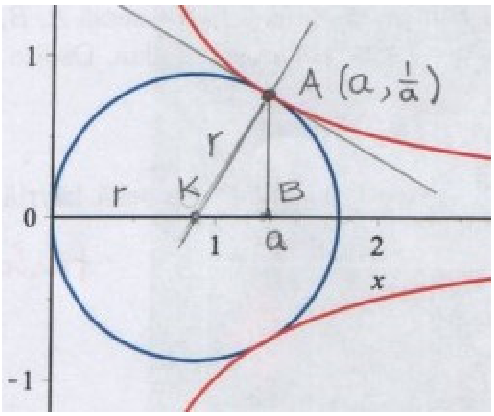
9.1.	Tekijöihin jako: $n^3+6n^2-7n=n(n^2+6n-7)=(n-1)n(n+7)$.	1
	Peräkkäisistä luvuista $n-1$ ja n toinen on varmasti parillinen, joten luvussa on tekijänä luku 2.	1
	Jos toinen tekijöistä $n-1$ ja n on kolmella jaollinen, niin luvussa on tekijänä myös luku 3.	1
	Jos näin ei ole, niin silloin varmasti luku $n+1$ on kolmella jaollinen.	1
	Mutta niin on myös luku $(n+1)+6=n+7$.	1
	Koska alkuperäinen luku on jaollinen luvuilla 2 ja 3, on se jaollinen myös luvulla $2\cdot 3=6$.	1
	TAI:	
	Tekijöihin jako: $n^3+6n^2-7n=n(n^2+6n-7)=(n-1)n(n+7)$.	1
	Peräkkäisistä luvuista $n-1$ ja n toinen on varmasti parillinen, joten luvussa on tekijänä luku 2.	1
	Koska $n\equiv n \pmod 3$, $n+7\equiv n+1 \pmod 3$ ja $n-1\equiv n+2 \pmod 3$,	2
	niin $n-1, n$ ja $n+7$ ovat keskenään eri luokkaa (mod 3). Siis jokin niistä on $\equiv 0 \pmod 3$ eli kolmella jaollinen.	1
	Koska alkuperäinen luku on jaollinen luvuilla 2 ja 3, on se jaollinen myös luvulla $2\cdot 3=6$.	1

9.2. a)	Supistamalla lausekkeella $x-2$, saadaan $\frac{x^7-60x-8}{x^2-4}=\frac{x^6+2x^5+4x^4+8x^3+16x^2+32x+4}{x+2}$,	2
	joka lähestyy arvoa $\frac{64+64+64+64+64+64+4}{4}=97$, kun x lähestyy arvoa 2.	1
b)	Koska $x^2-4=(x-2)(x+2)$, niin äärellinen raja-arvo voi olla olemassa vain, jos $x-2$ on myös osoittajan tekijä, eli luku 2 on sen nollakohta.	1
	Saadaan ehto $2^n-128=0$, josta $2^n=2^7$, eli $n=7$.	1
	Raja-arvo on siten olemassa vain arvolla $n=7$.	1

B2-osa

10. a)	Yhtälön $x=2+\ln x$ iterointi: $x_0=1$, $x_1=2+\ln 1=2$, $x_2=2+\ln 2=2{,}6931...$, $x_3=2+\ln 2{,}6931...=2{,}9907...$, $x_4=3{,}0955...$, $x_5=3{,}1299...$, $x_6=3{,}1410...$, $x_7=3{,}1445...$, $x_8=3{,}1456...$, $x_9=3{,}1460...$, $x_{10}=3{,}1461...$	2
	Vastaus on $x\approx 3{,}146$.	1
b)	$x=2+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=x-2 \Leftrightarrow x=e^{x-2}$	1
	Iterointi: $x_0=1$ $x_1=0{,}3678...$ $x_2=01955...$ $x_3=0{,}1645...$ $x_4=0{,}1595...$ $x_5=0{,}1587...$ $x_6=0{,}1586...$ $x_7=0{,}1585...$ $x_8=x_9=x_{10}=0{,}1585...$	1
	Vastaus on $x\approx 0{,}159$.	1

11.	Alla olevassa kuviossa ympyrän säde on r sekä käyrän $y=\frac{1}{x}$ ja ympyrän sivuamispiste $A\left(a,\frac{1}{a}\right)$. Tämän projektiopiste x-akselilla on $B(a,0)$. Koska $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$, niin pisteeseen A asetetun tangentin kulmakerroin on $-\frac{1}{a^2}$. Samaan pisteeseen asetetun normaalin kulmakerroin on siten a^2.	1
	Koska normaali kulkee myös ympyrän keskipisteen $K(r,0)$ kautta, voidaan sen kulmakerroin esittää muodossa $\frac{\frac{1}{a}}{a-r}$. Saadaan yhtälö $a^2=\frac{\frac{1}{a}}{a-r}$ eli $a^3(a-r)=1$ (1).	1
	Toisaalta suorakulmaisesta kolmiosta KBA saadaan Pythagoraan mukaan yhtälö $(a-r)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=r^2$ (2). Muodostetaan yhtälöistä (1) ja (2) pari $\begin{cases} a^3(a-r)=1 \\ (a-r)^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2=r^2 \end{cases}$.	1
	Ylemmästä yhtälöstä saadaan $a-r=\frac{1}{a^3}$, josta $r=a-\frac{1}{a^3}$.	1
	Sijoittamalla nämä molemmat alempaan yhtälöön, saadaan $\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^2}=a^2-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^6}$ ja edelleen $a^4=3$, josta $a=\pm\sqrt[4]{3}$, joista vain positiivinen arvo kelpaa.	1
	Lopulta saadaan $r=a-\frac{1}{a^3}=\frac{a^4-1}{a^3}=\frac{3-1}{\sqrt[4]{27}}=\frac{2}{\sqrt[4]{27}}$ $(=0{,}8773\ldots\approx 0{,}88)$.	1



12. a)	$\overline{N}\cdot\left(\overline{r}-\overline{r_0}\right)=\left(3\overline{i}-2\overline{j}+5\overline{k}\right)\cdot\left((x-1)\overline{i}+(y-2)\overline{j}+(z-3)\overline{k}\right)=$	1
	$3(x-1)-2(y-2)+5(z-3)=3x-3-2y+4+5z-15=0 \Leftrightarrow$ $3x-2y+5z=14$. Vakiot ovat siten $a=3,\ b=-2,\ c=5$ ja $d=14$.	1
b)	Saatu yhtälö toteutuu arvoilla $x=1,\ y=2$ ja $z=3$, koska $3-4+15=14$, joten piste on tasolla.	2
c)	Yhtälön $2x-5y+7z=14$ toteuttaa esim. piste $(7,0,0)$. Voidaan siis valita $\overline{r_0}=7\overline{i}$. Tällöin $\overline{r}-\overline{r_0}=(x-7)\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$. (Myös esim. vektori $\overline{r_0}=2\overline{k}$ kelpaa.)	1
	Jos $\overrightarrow{N}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$, niin $\overrightarrow{N}\cdot(\overline{r}-\overline{r_0})=0 \Leftrightarrow a(x-7)+by+cz=0$ $\Leftrightarrow ax+by+cz=7a$, joka on sama kuin $2x-5y+7z=14$, kun $a=2,\ b=-5$ ja $c=7$, jolloin $\overrightarrow{N}=2\overline{i}-5\overline{j}+7\overline{k}$.	1

13. a)	Luku $x=\frac{2}{3}$ on yhtälön $x-\frac{2}{3}=0$, eli myös yhtälön $3x-2=0$ juuri. Polynomi on siten $P_a(x)=3x-2$.	1
b)	Neliöimällä yhtälö $x=\sqrt{3}$ saadaan $x^2=3$. Polynomiksi kelpaa siten $P_b(x)=x^2-3$.	1
c)	Jos $x=2+\sqrt{3}$, niin $x-2=\sqrt{3}$, josta neliöimällä saadaan $(x-2)^2=3 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$. Polynomiksi käy siten $P_c(x)=x^2-4x+1$.	1
d)	Jos $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$, niin $x^2=5+2\sqrt{6}$, josta $x^2-5=2\sqrt{6}$. Neliöimällä uudelleen saadaan $(x^2-5)^2=24$, joten polynomi on $P_d(x)=x^4-10x^2+1$.	3