YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA
STUDENTEXAMENSNÄMNDEN

MATEMATIIKAN KOE, LYHYT OPPIMÄÄRÄ 25.9.2017
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

A-osa

1.

Lavennus TAI ristiinkertominen	1
$\Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$	1
Onnistuttu saamaan yhden muuttujan yhtälö, esim. sijoittamalla tai laskemalla yhteen.	1
$\Rightarrow y = \frac{11}{5}$ ja $x = \frac{16}{5}$	1
$(8 = 2^3)$	1
$3x + 1 = 3$ eli $x = \frac{2}{3}$	1

2.

Kaareva osa on puolet vastaavan lieriön pinta-alasta (joka saadaan kaavalla $2\pi rh$).	1
Likiarvolla $\pi \approx 3$ saadaan kaava $3rh$.	1
$\Rightarrow$Pinta-ala on $3 \cdot 5 \cdot 40 = 600$ (m^2).	1
$630 - 600 = 30$	1
$\Rightarrow$Tarkempi tulos on $\frac{30}{600}$ osaa suurempi	1
$\Rightarrow \frac{30}{600}100 = 5$ prosenttia suurempi.	1

3.

A, F, C, E, D, B, G	3
A, B, E, F, D, G	3
Osapisteet annetaan oikeiden peräkkäisten askelien määrän perusteella (esim. A–F ja F–C a-osassa). Ensimmäinen piste saadaan kahdella oikealla parilla, toinen neljällä oikealla.	

4.

Tehtävänannossa on kuvassa virheellisesti $y = f'(x)$ vaikka pitäisi olla $y = f(x)$. Kummastakin tapauksesta voi saada täydet pisteet.	
Vastaus: 1,2; 3,3 ja 4,9	2
Ensimmäinen piste, jos ainakin yksi oikein.	
Vastaus: väli $2{,}1 \leqslant x \leqslant 4{,}2$	1
ja $8{,}3 \leqslant x \leqslant 10$	1
Vastaus: pienin arvo 1,2	1
ja suurin arvo 4,2	1
Arvoksi kelpaavat yllä mainitut $\pm 0{,}1$.	

B1-osa

5.

Taulukko jossa prosentit 10, 15, 13 ja 17	2
Ensimmäinen piste, jos ainakin kaksi prosenttia oikein.	
Riston alennusprosentti on 6,25 ja Maurin 7,5.	1
Maurin alennusprosentti on siis 1,25 prosenttiyksikköä suurempi.	1
Vastauksen ero prosentteina prosenttiyksiköiden sijaan	-1
Yhdistetty ostoksen suuruus olisi 280 euroa, ja siitä saisi 40 euroa alennusta.	1
Alennusprosentti olisi siis $\frac{40}{280} \cdot 100 \approx 14{,}3$.	1

6.

Merkitään lipun hintaa muuttujalla x (euroa).	
Katsojamäärä saadaan kaavasta $3000 + 100(15 - x)$.	1
Lipputulo on tällöin $(4500 - 100x)x$.	1
Maksimin löytämiseksi lasketaan derivaataksi $4500 - 200x$	1
ja etsitään nollakohta $4500 - 200x = 0$.	1
$\Rightarrow$Suurimmat lipputulot saadaan, kun lipun hinta on 22,50 euroa,	1
ja ne ovat $(3000 + 100(15 - 22{,}5)) \cdot 22{,}5 = 50625{,}00$ euroa.	1
Maksimimoinnin voi suorittaa myös laskimella.	
Maksimimointi taulukoimalla	maks. 5

7.

Koska kaksi järjestäjää pääsevät varmasti paikalle, pitää selvittää muun 20 henkilön paikalle pääsy	1
(Todennäköisyydet ovat toisistaan riippumattomia,) joten lasketaan todennäköisyyksien tulo	1
$(0{,}85)^{20} \approx 0{,}0387595$ eli noin 3,9 prosentin todennäköisyydellä.	1
Todennäköisyys, että tietty ylioppilas ei pääse paikalle ja muut 19 (+2) pääsevät on $0{,}15 \cdot (0{,}85)^{19}$	1
Sama pätee muillekin yhdeksälletoista ylioppilaalle. (Koska nämä tapahtumat ovat komplementaarisia), lasketaan näiden 20 todennäköisyyden summa	1
$20 \cdot 0{,}15 \cdot (0{,}85)^{19} \approx 0{,}136798$, eli noin 14 prosentin todennäköisyydellä.	1

8.

Länsirajaa vastaa 4 asteen kaarikulma.	1
Maapallon ympärysimitta on noin $2\pi \cdot 6371 \approx 40030$ (km).	1
$\Rightarrow$Kysytty pituus on $40030 \cdot \frac{4}{360} \approx 445$ (km).	1
Vastaus: eteläraja pitempi kuin pohjoisraja.	1
Perustelu: Sekä etelä- että pohjoisrajaa vastaa 7 asteen kaarikulma.	1
Vakiokaarikulmaa vastaava kaari pienenee siirryttäessä päiväntasaajalta navalle eli pohjoisella pallonpuoliskolla etelästä pohjoiseen.	1

Kaarikulmat 4 ja 7 sekaisin	maks. 5
Virhe ympärysmitan laskussa	maks. 5

9.

Merkitään ensimmäisenä vuonna jaettua summaa euroissa muuttujalla x. Toisena vuotena jaettavaa on siten $1{,}1x$.	1
Seitsemänä vuonna jaettava on siis $(1 + 1{,}1 + (1{,}1)^2 + \ldots (1{,}1)^6)x = 9{,}487171x$.	1
Yhtälöstä $9{,}487171x = 800000$ saamme siten vastaukseksi 84324,40 tai noin 84300 euroa.	1
Merkitään kasvusuhdetta muuttujalla q, jolloin saamme yhtälöksi $70000(1 + q + q^2 + \ldots q^6) = 800000$,	1
josta geometrisen summan kaavalla $\frac{q^7-1}{q-1} = \frac{80}{7}$.	1
Taulukoimalla q:n arvoja havaitaan, että kasvuprosentin tulee olla noin 16 (16,042).	1
Yhtälö voidaan myös ratkaista numeerisesti laskimella.	

Tehtävässä voi käyttää geometrisen summan kaavaa, mutta tämä ei ole välttämätöntä. Huomaa, että saatu kuudennen tai seitsemännen asteen polynomiyhtälö ei ratkea analyyttisesti.	

B2-osa

10.

Suodatuksen jälkeen bakteereja on jäljellä 0,04 kertaa alkuperäinen määrä.	1
Kahden suodatuksen jälkeen on siis $(0{,}04)^2 \approx 0{,}0016$ jäljellä, eli noin 99,8 % saadaan pois.	1
Muodostetaan yhtälö $(0{,}04)^k = 0{,}000005$,	1
jonka ratkaisu logaritmilla tai laskimella $k \approx 3{,}79$, $\Rightarrow$pitää suodattaa vähintään neljä kertaa.	1
Muodostetaan yhtälö $(1-q)^2 = 0{,}000005$.	1
$\Rightarrow q \approx 0{,}9977639$ eli kerralla pitää suodattaa noin 99,78 % bakteereista.	1

11.

Tapahtuma B on tapahtuman A vastatapahtuma, jos tapahtumilla on erilliset alkeisjoukot, jotka yhdessä kattavat kaikki mahdolliset alkeistapaukset.	1
Koska tapahtuma tai sen vastatapahtuma tapahtuu varmasti, on näiden todennäköisyyksien summa 1, eli kaavalla $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ saadaan laskettua vastatapahtuman todennäköisyys.	1
Merkitään tapahtuma A: Linda on pankkivirkailija	1
ja B: Linda on aktiivinen feministiliikkeessä	1
Kokeiden vastaajien mukaan $P(A \text{ ja } B) > P(A)$,	1
mutta tämä on mahdotonta, sillä $P(A \text{ ja } B) \leqslant P(A)$, koska “$A$ ja B”:n sattuessa sattuu myös A.	1

12.

Laivan kokonaissiirtymä saadaan laskettua vektorien summan avulla	1
$\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = -1{,}5\overline{i} - 7{,}6\overline{j}$.	2
Kysytty etäisyys d on em. vektorin pituus, joka saadaan Pythagoraan lauseella	1
$d = \sqrt{(-1{,}5)^2 + (7{,}6)^2}$	1
$\approx 7{,}7466$ eli 7700 (m).	1
Jos vektorissa $-1{,}5\overline{i} - 7{,}6\overline{j}$ toinen komponentti väärin	-1

13.

Yhtälöt voivat olla esim. $y = x$, $y = 2x$ ja $y = 3x$, joiden ainoa ratkaisu on $(0,0)$.	2
Yhtälöt voivat olla esim. $y = x$, $y = 2x$ ja $y = x + 1$, koska kahden ensimmäisen ratkaisu on $(0,0)$, mutta tämä ei toteuta kolmatta yhtälöä.	2
Graafisesti a-kohta vastaa tilannetta, jossa kolmella suoralla on yhteinen leikkauspiste,	1
ja b-kohta tilannetta, jossa leikkauspisteet ovat erilliset, TAI tilannetta, jossa kaksi suoraa ovat yhdensuuntaisia eikä niillä siten ole leikkauspistettä.	1
c-kohdassa riittää, että kuvaa sitä tilannetta, joka oman b-kohdan esimerkissä esiintyy.	