



Tehtävissä 4, 7, 8 ja 10 ratkaistaan joko kohta a) tai kohta b).

1. Tasamaalla kasvavan pystysuoran puun varjon pituus on 37 metriä, kun aurinko näkyy 28° :n kulmassa horisontin yläpuolella. Mikä on puun pituus?
2. Neljästä desilitrasta savea muotoillaan kaksi palloa siten, että pienemmän tilavuus on puolet suuremman tilavuudesta. Mitkä ovat pallojen säteet?
3. Ratkaise epäyhtälö $\frac{1}{5}x - 1 < \frac{1}{4}x + a$, jossa $a \in \mathbf{R}$ on vakio. Tutki sitten, millä a :n arvolla epäyhtälön ratkaisujoukko on väli $]5, \infty[$.
4. a) Määritä ne reaaliluvut x , joilla funktion $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$ derivaatta on $\sin x$.

b) Oletetaan, että pankin korkokanta on p %, kun korko lisätään pääomaan vuosittain. Mikä korkokannan pitäisi olla, jos korko lisättäisiin pääomaan puolivuositin, jotta tulos pysyisi samana?
5. Suorakulmaisen kolmion kateettien suhde on 1:2. Missä suhteessa hypotenuusalle piirretty korkeusjana jakaa hypotenuusan?
6. Tasossa on annettu pisteet $A = (-2, 0)$ ja $B = (2, 3)$. Määritä niiden tason pisteiden $P(x, y)$ joukko, jotka toteuttavat ehdon $|\overline{AP}| \leq 2|\overline{BP}|$. Piirrä kuvio.
7. a) Kukansiemeniä sisältävän säkin kyljessä kerrotaan, että siementen itämistodennäköisyys on 95 % ja että 5 % säkin sisällöstä on samannäköisiä rikkaruohon siemeniä. Säkin siemenet jaetaan kahdenkymmenen siemenen pusseihin. Millä todennäköisyydellä puutarhuri, joka kylvää tällaisen pussillisen siemeniä, saa vähintään 19 haluamaansa kukantainta? Millä todennäköisyydellä hän kylvää vähintään yhden rikkaruohonsiemenen?

b) Osoita, että kahden reaalimuuttujan funktion $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2$ kaikki arvot ovat ei-negatiivisia. Osoita myös, että funktio saa kaikki ei-negatiiviset reaalilukuarvot.
8. a) Paikkakunnat A ja B sijaitsevat pohjoisella pallonpuoliskolla siten, että kummankin leveysaste on 49 mutta pituusasteiden ero on 38 . Laske paikkakuntien välimatka leveyspiiriä

pitkin mitattuna. Laske myös paikkakuntien välinen lyhin välimatka maan pintaa pitkin mitattuna. (Maanpinnan epätasaisuutta ei oteta huomioon.) Maapallon isoympyrän pituudeksi oletetaan 40 000 km. Anna vastaus kolmen numeron tarkkuudella.

b) Kolmion kaksi kärkeä on pisteissä (1,3) ja (2,5). Kolmas kärki on käyrällä $y = \ln(1+x)$. Mitkä ovat kärjen koordinaatit, kun kolmion ala on mahdollisimman pieni?

9. Funktio $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ määritellään seuraavasti: $f(x) = 2^{-n}(-x+n)(x-n-1)$, kun $n \leq x < n+1$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Laske funktion kuvaajan ja x -akselin väliin jäävän alueen ala.

10. a) Miten määritellään funktion f derivaatta kohdassa $x = a$? Anna esimerkki funktiosta, joka ei ole derivoituva kohdassa $x = 1$. Määritellään funktio $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tutki, onko f derivoituva kohdassa $x = 0$.

b) Positiivinen, derivoituva funktio f on kasvava, ja sen kuvaaja kulkee pisteen (0,1) kautta. Funktion kuvaajan mielivaltaiseen pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ asetettu tangentti muodostaa yhdessä x -akselin ja suoran $x = x_0$ kanssa kolmion, jonka ala $A = f(x_0)$. Määritä funktio f .